УДК 62-50

Д. С. Бирюков, А. В. Ушаков

КОНТРОЛЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ НА УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ВОСПРОИЗВЕДЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЭКЗОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ: ГРАМИАННЫЙ ПОДХОД

Рассматривается задача контроля энергетических затрат на управление при воспроизведении синтезируемой системой полиномиальных экзогенных воздействий с использованием грамианного подхода. Задача имеет прозрачное решение для начальных состояний источника таких воздействий в виде мажоранты и миноранты затрат на управление как функций распределения мод.

Ключевые слова: *источник полиномиального экзогенного воздействия, вектор начального состояния, объект управления, установившаяся составляющая, грамиан затрат на управление, минорантная и мажорантная оценки.*

В работах [1, 2] рассматривалась задача выбора желаемой структуры мод, осуществляемого при контроле энергетических затрат на управление начальным состоянием технического объекта (ТО), из множества возможных желаемых структур мод при условии выполнения отношения порядка полиномов [3] применительно к длительности переходного процесса и возможному перерегулированию. Также в работах [1, 2] были выделены некоторые типовые источники экзогенных воздействий, для которых проблему оценивания затрат на управление следовало рассмотреть отдельно. В настоящей статье эта проблема формулируется как задача контроля затрат на управление объектом при воспроизведении синтезируемой системой полиномиальных экзогенных воздействий с использованием грамианного подхода.

Грамианный подход сформировался в рамках современной теории управления, опирающейся на векторно-матричный формализм метода пространства состояний. Подход устанавливает аналитическую связь компонентов движения ТО, входящего в состав синтезируемой системы, по выходу и вектору начального состояния источника полиномиальных экзогенных воздействий. При этом наибольший практический интерес в рассматриваемой задаче представляет установившаяся составляющая движения объекта. Алгоритмически данная связь опирается на концепцию векторно-матричного подобия, матрица которого является решением уравнения Сильвестра. Оценка затрат на управление при воспроизведении системой установившегося движения по выходу формируется на основе закона управления, записанного в аддитивной форме, одно слагаемое которого должно обеспечивать требуемое качество воспроизведения полиномиальных экзогенных воздействий, а второе — требуемое качество выходного сигнала системы при установившейся составляющей движения. Очевидно, в установившемся режиме сохраняется только первая составляющая закона управления, что позволяет связать его с начальным состоянием источника полиномиальных экзогенных воздействий.

Для получения аналитического соотношения между компонентами движения динамической системы и вектором начального состояния источника полиномиального экзогенного воздействия (ПЭВ) рассмотрим технический объект, математическая модель которого описывается выражением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(t)\big|_{t=0} = x(0), \quad \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — вектор состояния объекта, $u(t)$ — вектор входного воздействия (управление), $y(t)$ — вектор выходного воздействия, $g(t)$ — вектор экзогенного воздействия, $\varepsilon(t)$ — вектор ошибки: $x \in R^n$; $u \in R^r$; $y, g, \varepsilon \in R^m$; A, B, C — соответственно матрицы состояния, управления и выхода, размерности которых согласованы с перемножаемыми переменными.

Математическая модель источника полиномиального экзогенного воздействия $g(t)$ задается в форме

$$\dot{z}(t) = Ez(t), \quad z(t)\big|_{t=0} = z(0), \quad g(t) = Pz(t), \qquad (2)$$

где $z(t)$ — вектор состояния источника, $z \in R^l$; E, P — матрицы состояния и выхода, согласованные по размерности с размерностями векторов z и g.

Для источника ПЭВ, в отличие от источника гармонического экзогенного воздействия [2], невозможно привести одну универсальную реализацию матриц E и P, поскольку порядок полиномов может быть различным. Указанные матрицы имеют следующий общий вид:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Например, для источника ПЭВ третьего порядка математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Для технического объекта требуется синтезировать закон управления, обеспечивающий в замкнутой системе желаемое распределение мод и соответствие выходного сигнала системы при установившемся режиме задающему воздействию:

$$u(t) = u_\lambda(t) + u_g(t) = K_g g(t) - Kx(t), \qquad (5)$$

где $u_\lambda(t)$ — составляющая управления, обеспечивающая желаемое распределение мод; $u_g(t)$ — составляющая управления, обеспечивающая соответствие выходного сигнала задающему воздействию; K, K_g — матрица обратных связей.

Дальнейший ход вычислений приведен в работе [2].

В результате объединения выражений (1) и (5) с получением модели замкнутой системы и конструирования агрегированной системы с вектором состояния $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & z^T(t) \end{bmatrix}^T$ и матрицами состояния F и G, которые заданы соотношениями $F = A - BK, G = BK_g$, получим уравнения для компонентов исходной системы, выраженных через компоненты агрегированной системы:

$$x(t)=Ix(t)+0z(t)=\begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix}\tilde{x}(t),\quad x(t)=\tilde{C}_x\tilde{x}(t)=\tilde{C}_x e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0); \tag{6}$$

$$y(t)=Cx(t)+0z(t)=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\tilde{x}(t),\quad x(t)=\tilde{C}_y\tilde{x}(t)=\tilde{C}_y e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0); \tag{7}$$

$$\varepsilon(t)=-Cx(t)+Pz(t)=\begin{bmatrix}-C & P\end{bmatrix}\tilde{x}(t),\quad x(t)=\tilde{C}_\varepsilon\tilde{x}(t)=\tilde{C}_\varepsilon e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0); \tag{8}$$

$$z(t)=0x(t)+Iz(t)=\begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix}\tilde{x}(t),\quad x(t)=\tilde{C}_z\tilde{x}(t)=\tilde{C}_z e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0). \tag{9}$$

В целях дальнейших исследований сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Если матрицы F, E, G, P связаны матричным уравнением Сильвестра

$$TE-FT=GP, \tag{10}$$

то матричная экспонента $e^{\tilde{F}t}$ может быть представлена в виде

$$e^{\tilde{F}t}=\begin{bmatrix}e^{Ft} & Te^{Et}-e^{Ft}T\\ 0 & e^{Et}\end{bmatrix}. \qquad \square\ (11)$$

Доказательство утверждения приведено в работе [4]. ■

Используя выражение (11), уравнения движения агрегированной системы можно записать следующим образом:

$$\tilde{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{Ft} & Te^{Et}-e^{Ft}T\\ 0 & e^{Et}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\ z(0)\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Тогда уравнения движения замкнутой системы приобретают следующий вид:

$$x(t)=e^{Ft}x(0)+\left(Te^{Et}-e^{Ft}T\right)z(0),\quad y(t)=Cx(t), \tag{13}$$

что позволяет выделить в движении системы по вектору состояния $x(t)$ установившуюся составляющую:

$$x_y(t)=\lim_{t\to\infty}x_{\text{в}}(t)=Te^{Et}z(0), \tag{14}$$

где $x_{\text{в}}(t)$ — вынужденная составляющая движения системы.

Утверждение 2. Матрица T — решение уравнения Сильвестра (10) — представляет собой матрицу подобия, связывающую установившуюся составляющую $x_y(t)$ движения системы и вектор состояния $z(t)$ источника полиномиального экзогенного воздействия (2). □

Доказательство утверждения приведено в работе [2]. ■

Утверждение 3. Решение уравнения Сильвестра (10) для случая полиномиального экзогенного воздействия порядка *n* представимо в форме

$$T=\begin{bmatrix}-F^{-1}G & -F^{-2}G & \ldots & -F^{-n}G\end{bmatrix}. \qquad \square\ (15)$$

Доказательство. Для случая когда полиномиальное экзогенное воздействие содержит статическую, кинетическую и динамическую составляющие, матрицы E и P модели (2) источника ПЭВ имеют вид (3). Если матрицу T представить в столбцовой форме, записав ее как

$$T=\begin{bmatrix}T_1 & T_2 & \ldots & T_n\end{bmatrix},$$

то уравнение Сильвестра (10) преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix}T_1 & T_2 & \ldots & T_n\end{bmatrix}E-F\begin{bmatrix}T_1 & T_2 & \ldots & T_n\end{bmatrix}=GP. \tag{16}$$

Подстановка в уравнение (16) матриц E и P в форме (3) позволяет для столбцов матрицы T записать $T_1=-F^{-1}G, T_2=-F^{-2}G, \ldots T_n=-F^{-n}G$, что приводит к выражению (15). ■

Отметим, что наличие известной из метода модального управления связи $M\Gamma = FM$ матрицы Γ состояния модальной модели и матрицы F состояния системы, а также полученное соотношение (15) для матрицы T в уравнении Сильвестра (10) позволяют существенно модифицировать сформированный в работе [2] алгоритм оценивания затрат на управление установившимся движением проектируемой системы в функции от заданного распределения мод матрицы состояния F. Матрица подобия M определяется из уравнения Сильвестра: $M\Gamma - AM = -BH$, где H — матрица выхода модальной модели.

Для того чтобы оценить затраты на управление, используется грамиан затрат на управление установившимся движением системы, определенный в работе [2]:

$$W_U(t) = \int_0^t e^{E^T\tau}\left(K_g P - KT\right)^T \left(K_g P - KT\right) e^{E\tau} d\tau . \qquad (17)$$

При $t \to \infty$ справедливо соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} W_U(t) = W_U$. Грамиан W_U затрат на управление удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова:

$$E^T W_U + W_U E = -\left(K_g P - KT\right)^T \left(K_g P - KT\right). \qquad (18)$$

В соответствии с выражением (17) можно вычислить оценку затрат $\|U\|_\infty$ на управление для начальных состояний источника ПЭВ $\left(\|z(0)\| = \text{const}\right)$ в форме мажоранты $\left\|U_{[0,\infty)}\right\|_{\max}$ и миноранты $\left\|U_{[0,\infty)}\right\|_{\min}$ с использованием сингулярного разложения грамиана W_U:

$$\alpha_{\min}^{1/2}\{W_U\}\|z(0)\| = \left\|U_{[0,\infty)}\right\|_{\min} \le \left\|U_{[0,\infty)}\right\| = \left(z^T(0) W_U z(0)\right)^{1/2} \le \left\|U_{[0,\infty)}\right\|_{\max} =$$
$$= \alpha_{\max}^{1/2}\{W_U\}\|z(0)\|, \qquad (19)$$

где $\alpha_{\min}\{W_U\}$, $\alpha_{\max}\{W_U\}$ — минимальное и максимальное сингулярные числа грамиана W_U соответственно.

Таким образом, контроль затрат на управление при полиномиальном экзогенном воздействии может быть осуществлен с использованием следующего алгоритма.

1. Сформировать векторно-матричное описание технического объекта в форме (1).

2. Задать источник полиномиального экзогенного воздействия с помощью векторно-матричного описания в форме (2).

3. Реализовать требования к качеству процессов в проектируемой системе в переходном и установившемся режимах для источника ПЭВ (2) в виде структуры мод матрицы F, назначив ее носителем матрицу Γ, задаваемую наблюдаемой парой матриц $\left(\Gamma, H : \dim H = \dim B^T\right)$.

4. Сформировать матрицу K обратной связи по вектору состояния $x(t)$ с использованием методов модального управления: $K = HM^{-1}$.

5. Сформировать матрицу прямых связей $K_g = -\left(CM\Gamma^{-1}M^{-1}B\right)^{-1}$.

6. Сформировать в форме (15) матрицу T в уравнении Сильвестра (10).

7. Решить уравнение Ляпунова (18) относительно грамиана W_U.

8. Вычислить оценки затрат на управление системой в установившемся режиме при заданном экзогенном воздействии в форме мажорант и минорант этих затрат с использованием соотношения (19).

9. Провести анализ полученных оценок. Вернуться к п. 3 алгоритма в целях модификации структуры мод. По достижении минимальных значений мажоранты $\left\|U_{[0,\infty)}\right\|_{\max}$ завершить реализацию алгоритма.

Пример. Рассмотрим исходную систему с характеристическим полиномом Баттерфорта второго порядка:

$$\Phi_1(s) = \frac{(n\omega_0)^2}{s^2 + \sqrt{2}\cdot n\omega_0 s + (n\omega_0)^2},$$

где n — радиус области расположения желаемых мод полинома, ω_0 — характеристическая частота системы.

Представим эту систему как блок с астатизмом первого порядка, охваченный единичной отрицательной обратной связью:

$$\Phi_1'(s) = \frac{(n\omega_0)^2}{s^2 + \sqrt{2}\cdot n\omega_0 s}.$$

Модель источника полиномиального воздействия зададим следующим выражением:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};\ z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, полиномиальное экзогенное воздействие представляет собой воздействие с постоянными статической и кинетической составляющими: $g(t) = t + 1$.

Оценим затраты на воспроизведение ПЭВ $g(t) = 1t + 1$ при изменении n от 0,1 до 10 с шагом 0,1. Результаты моделирования рассматриваемой задачи в среде MatLab приведены на рис. 1. Анализ представленной зависимости показывает, что затраты на управление значительно снижаются при увеличении n.

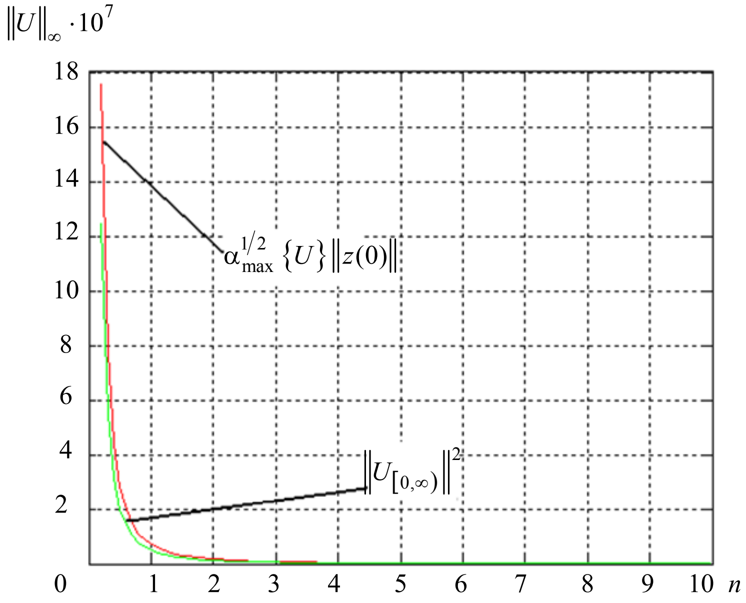

Рис. 1

Модифицируем систему, придав ей астатизм второго порядка:

$$\Phi_2(s) = \frac{\sqrt{2}\cdot n\omega_0 s + (n\omega_0)^2}{s^2 + \sqrt{2}\cdot n\omega_0 s + (n\omega_0)^2},\quad \Phi_2'(s) = \frac{\sqrt{2}\cdot n\omega_0 s + (n\omega_0)^2}{s^2}.$$

Оценим затраты на воспроизведение ПЭВ $g(t)=1t+1$ n от 0,1 до 1 с шагом 0,01. Результаты моделирования представлены на рис. 2.

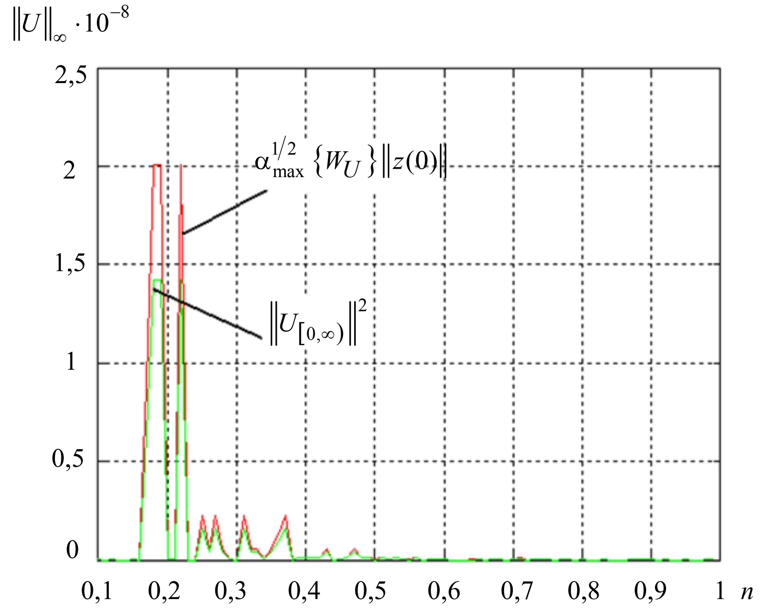

Рис. 2

Анализ зависимости показывает, что в данном случае затраты на управление изначально невелики вследствие того, что второй порядок астатизма обеспечивает в установившемся режиме воспроизведение полиномиального экзогенного воздействия первого порядка с нулевой ошибкой.

Таким образом, предложенный алгоритм формирования затрат на управление установившимся движением системы, порождаемым полиномиальным экзогенным воздействием, построен на использовании экстремальных элементов алгебраического спектра сингулярных чисел грамиана затрат на управление. Однако, по мнению авторов, „тонкое" решение задачи требует, кроме того, исследования структуры элементов геометрического спектра левого сингулярного базиса этого грамиана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирюков Д. С., Слита О. В., Ушаков А. В.* Оценка затрат на управление в задаче обеспечения желаемой структуры мод и их робастности// Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 11. С. 32—37.

2. *Бирюков Д. С., Ушаков А. В.* Контроль затрат на управление при воспроизведении гармонических экзогенных воздействий: грамианный подход // Науч.-техн. вестн. СПбГУ ИТМО. 2011. № 2 (72). С. 117—123.

3. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2004.

4. *Ушаков А. В.* Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях // Автоматика и телемеханика. 1992. № 10. С. 72—82.

Сведения об авторах

Дмитрий Сергеевич Бирюков — аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: dbiryukov@list.ru

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-AVG@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
10.04.12 г.