УДК 623.396.969.3

А. С. Бачевский, В. А. Шаталова

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ НЕГАУССОВЫХ УЗКОПОЛОСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Рассматривается синтез алгоритма оптимального обнаружения негауссова узкополосного случайного сигнала, принимаемого на фоне помех, и анализ его статистических характеристик.

Ключевые слова: *случайный процесс, плотность распределения вероятностей, сигналы, помехи.*

Введение. Для осуществления оптимального статистического синтеза систем обнаружения негауссовых узкополосных случайных процессов при наличии помех необходимо определить совместные условные плотности распределения вероятностей (ПРВ) выборок случайных величин по каждой из проверяемых гипотез [1].

Задача обнаружения сигналов при наличии помех, когда и те, и другие подчиняются гауссову распределению вероятностей, рассмотрена в работах [2, 3].

Натурные эксперименты, проведенные отечественными и зарубежными специалистами, показали, что случайные амплитуды принимаемых сигналов и помех подчиняются рэлеевскому, вейбулловскому, логарифмически нормальному или m-распределению (Накагами), а фазы являются равномерно распределенными случайными величинами [4]. Если случай рэлеевского распределения хорошо известен [1—4], то три других в настоящее время значительно менее изучены, так как и одномерные, и многомерные плотности распределения вероятностей таких сигналов не были описаны вплоть до появления работы [5].

Цель настоящей статьи — синтез алгоритма оптимального обнаружения негауссова узкополосного случайного сигнала, принимаемого на фоне помех, и анализ его статистических характеристик.

Алгоритм обнаружения узкополосного сигнала с нерэлеевской амплитудой и равномерно распределенной фазой. Постановка задачи обнаружения традиционная и формулируется как проверка двух гипотез

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \xi(t) = n(t); \\ H_1 &: \ \xi(t) = n(t) + s(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $n(t)$ — случайный процесс (помеха), представляющий собой белый гауссов шум (БГШ), ПРВ и числовые характеристики которого равны соответственно

$$p\left[\xi_i \middle| H_0\right] = p\left(n_i\right) = \left(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma\right)^{-1} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}\right); \tag{2}$$

$$M\left[n_i(t)\right] = 0 \,, \ M\left[n_i^2(t)\right] = \sigma^2 \,,$$

где $M\left[\cdot\right]$ — означает операцию вычисления математического ожидания выражения, находящегося в квадратных скобках; $s(t)$ — полезный сигнал, представляющий собой случайный процесс (СП); i — номер выборки помехи.

Будем считать, что СП $s(t)$ можно представить в виде

$$s(t) = \nu f(t-\tau) \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right), \tag{3}$$

где ν — амплитуда сигнала — случайная величина, распределенная по одному из указанных выше законов; ω_0 — несущая частота колебания; $f(t)$ — огибающая сигнала; τ — задержка сигнала; φ — фаза — случайная величина, ПРВ которой равна

$$p(\varphi)=\begin{cases}0, & -\infty<\varphi<-\pi;\\ (2\pi)^{-1}, & -\pi<\varphi<\pi,\\ 0, & \pi<\varphi<\infty.\end{cases}$$

Последовательно рассмотрим решение задачи обнаружения для указанных выше законов, которые соответствуют случаю медленно флуктуирующих негауссовых узкополосных сигналов, принимаемых на фоне БГШ, а затем обобщим результаты решения для случая, когда $\nu(t)$ — случайный процесс с дискретным временем.

Вариант 1. Случайная величина ν распределена по вейбулловскому закону. Используя правила нахождения ПРВ функционально преобразованных случайных величин, получаем для $s(t)$, определяемого формулой (3), следующее выражение:

$$p(\zeta)=c\alpha\beta\zeta^{\alpha-1}\exp(-\beta\zeta^{\alpha})\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta\zeta^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right)dy, \qquad (4)$$

где α и β — параметры,

$$c=\left(\frac{\alpha\beta}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\zeta^{\alpha-1}\exp(-\beta\zeta^{\alpha})\frac{1}{2}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta\zeta^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right)dyd\zeta\right)^{-1}.$$

Сомножитель $\alpha\beta\zeta^{\alpha-1}\exp(-\beta\zeta^{\alpha})$ является вейбулловской ПРВ, которая определена при $\zeta\ge 0$. При $\alpha=1$ она совпадает с показательным распределением, при $\alpha=2$ — с распределением Рэлея. Во избежание путаницы ПРВ (4) будем называть модифицированной вейбулловской ПРВ (МПРВ).

Поскольку прием сигнала, подчиняющегося МПРВ описанного выше типа, осуществляется на фоне белого гауссова шума, аддитивная модель сигнала и шума должна характеризоваться сверткой двух ПРВ, подчиняющихся гауссовой ПРВ (2) и вейбулловской МПРВ (4). Полученная ПРВ соответствует условной ПРВ случайного процесса $\xi(t)=n(t)+s(t)$ в случае истинной гипотезы H_1. Для скалярных $n_i(t)$ и $s_i(t)$ ПРВ определяется выражением [5]

$$p(\xi_i|H_1)=c\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\frac{\alpha\beta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{(\xi_i-z)^2}{2\sigma^2}-\beta z^{\alpha}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta z^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right)dydz. \qquad (5)$$

Данное выражение следует преобразовать к виду

$$p(\xi_i|H_1)=\frac{c}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}\right)\frac{\alpha\beta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{-2\xi_i z+z^2}{2\sigma^2}-\beta z^{\alpha}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta z^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right)dydz. \qquad (6)$$

Используя формулы (2) и (6), получаем выражение для отношения правдоподобия:

$$\Lambda\left[\xi_i\right]=\frac{p(\xi_i\left|H_1\right.)}{p(\xi_i\left|H_0\right.)}=c\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{-2\xi_i z+z^2}{2\sigma^2}-\beta z^{\alpha}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta z^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right)dydz\,. \tag{7}$$

Если $\Lambda\left[\xi_i\right]\geq\gamma$, где γ — порог обнаружения сигнала, принимается решение о его наличии на фоне БГШ, если $\Lambda\left[\xi_i\right]<\gamma$, принимается решение об отсутствии сигнала.

Пользоваться на практике выражением (7) крайне неудобно. Поэтому следует его преобразовать, используя разложение экспоненты в степенной ряд:

$$\exp\left(-\xi_i\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)\right)=1-\frac{\xi_i\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)}{1!}+\frac{\xi_i^2\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)^2}{2!}-\frac{\xi_i^3\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)^3}{3!}+\frac{\xi_i^4\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)^4}{4!}-... \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в формулу (7), находим

$$\Lambda\left[\xi_i\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_i^k c\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{\alpha-1}\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)^k\left(k!\right)^{-1}\exp\left(-\left(\frac{z^2}{2\sigma^2}+\beta z^{\alpha}\right)\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta z^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right)dydz. \tag{9}$$

Обозначив

$$\rho_k=c\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{\alpha-1}\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)^k\left(k!\right)^{-1}\exp\left(-\left(\frac{z^2}{2\sigma^2}+\beta z^{\alpha}\right)\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta z^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right)dydz\,,$$

получим следующий вариант записи отношения правдоподобия в виде полинома:

$$\Lambda\left[\xi_i\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k\xi_i^k\underset{<}{\geq}\gamma. \tag{10}$$

Вариант 2. Случайная величина ν распределена по логарифмически нормальному закону. Используя правила нахождения ПРВ функционально преобразованных случайных величин, получаем для $s(t)$

$$p\left(\zeta\right)=c\frac{1}{\sigma\zeta\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln\zeta-\alpha\right)^2\right)\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\ln y\left(1-\left(\ln\zeta-\alpha\right)\right)\right)dy, \tag{11}$$

где

$$c=\left(\sigma\zeta\sqrt{2\pi}\right)\left(\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln\zeta-\alpha\right)^2\right)\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\ln y\left(1-\left(\ln\zeta-\alpha\right)\right)\right)dyd\zeta\right)^{-1}.$$

Определяющими параметрами являются $-\infty<\alpha<\infty$ и σ. Во избежание путаницы ПРВ (11) будем называть модифицированной ПРВ по логарифмически нормальному закону.

Свертка двух ПРВ, подчиняющихся логарифмически нормальной МПРВ (11) и гауссовой ПРВ (2), определяется формулой

$$p(\xi_i|H_1) = c\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\nu}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln\nu-\alpha)^2\right)\exp\left(-\frac{(\xi_i-\nu)^2}{2\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\ln y\left(1-(\ln\nu-\alpha)\right)\right)dyd\nu. \tag{12}$$

Представим выражение (12) в удобном для дальнейших преобразований виде:

$$p(\xi_i|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}\right)c\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\nu}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln\nu-\alpha)^2\right)\exp\left(-\frac{-2\nu\xi_i+\nu^2}{2\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\ln y\left(1-(\ln\nu-\alpha)\right)\right)dyd\nu. \tag{13}$$

Используя формулы (2) и (13), получаем выражение для отношения правдоподобия:

$$\Lambda[\xi_i] = \frac{c}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\nu}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln\nu-\alpha)^2\right)\exp\left(\frac{\nu\xi_i}{\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\ln y\left(1-(\ln\nu-\alpha)\right)\right)dyd\nu, \tag{14}$$

которое с помощью разложения в степенной ряд можно записать в виде полинома:

$$\Lambda[\xi_i] = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_i^k c\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu}{\sigma^2}\right)^k (k!)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln\nu-\alpha)^2-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\ln y\left(1-(\ln\nu-\alpha)\right)\right)dyd\nu = \sum_{k=0}^{\infty}\upsilon_k\xi_i^k \underset{<}{\geq} \gamma, \tag{15}$$

где

$$\upsilon_k = c\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu}{\sigma^2}\right)^k (k!)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln\nu-\alpha)^2-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\ln y\left(1-(\ln\nu-\alpha)\right)\right)dyd\nu.$$

Если $\Lambda[\xi_i] \geq \gamma$, принимается решение о наличии сигнала на фоне БГШ, если $\Lambda[\xi_i] < \gamma$ — об его отсутствии.

Вариант 3. Случайная величина ν распределена по *m*-закону (Накагами). Используя правила нахождения ПРВ функционально преобразованных случайных величин, получаем для $s(t)$

$$p(\zeta) = c\frac{2c}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m \zeta^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}\zeta^2\right)\times$$
$$\times\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{y}\right)^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}\zeta^2\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\right)\left(\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\right)dy, \tag{16}$$

где

$$c=\left[\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}\zeta^2\right)\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{y}\right)^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}\zeta^2\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\right)\left(\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\right)dy\right]^{-1};$$

m и σ — определяющие параметры, $m\geq 0,5$; $\Gamma(m)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая выражением $\Gamma(m)=\int\limits_0^{\infty}y^{m-1}e^{-y}dy$. Во избежание путаницы ПРВ (16) будем называть модифицированной ПРВ по m-закону (Накагами).

Свертка ПРВ (16) и (2) определяется формулой [5]

$$p(\xi_i|H_1)=c\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2\right)\exp\left(-\frac{(\xi_i-z)^2}{2\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{y}\right)^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\right)\left(\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\right)dydz. \quad (17)$$

Представим выражение (17) в удобном для дальнейших преобразований виде:

$$p(\xi_i|H_1)=c\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}\right)\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{-2z\xi_i+z^2}{2\sigma^2}\right)\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{y}\right)^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\right)\left(\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\right)dydz. \quad (18)$$

Используя формулы (2) и (18), получаем выражение для отношения правдоподобия:

$$\Lambda[\xi_i]=c\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(\xi_i\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)\right)\times$$
$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{y}\right)^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\right)\left(\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\right)dydz, \quad (19)$$

которое с помощью разложения в степенной ряд можно записать в виде

$$\Lambda[\xi_i]=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_i^k c\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{2m-1}\frac{z}{\sigma^2}(k!)^{-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{y}\right)^{2m-1}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\right)\left(\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\right)dydz=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\xi_i^k\gtrless\gamma, \quad (20)$$

где

$$\mu_k=c\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{2m-1}\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)(k!)^{-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{y}\right)^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}z^2\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\right)\left(\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\right)dydz.$$

Как и в предыдущих вариантах, если $\Lambda[\xi_i]\geq\gamma$, принимается решение о наличии сигнала на фоне БГШ, если $\Lambda[\xi_i]<\gamma$ — об его отсутствии.

Таким образом, во всех трех вариантах постановки задачи обнаружения случайных величин удалось представить отношение правдоподобия в виде полинома по степеням k, но с разными коэффициентами, отражающими специфику каждой из модифицированных ПРВ. Естественно, необходимо ограничить суммы в выражениях (10), (15) и (20) конечным числом p. Важно отметить, что решение задачи обнаружения описанным способом оказывается справедливым и для случая приема негауссовых сигналов на фоне негауссовых белых шумов.

Обобщение результатов для многомерного случая. Полученные результаты распространим на случай совокупности N некоррелированных выборок, каждая из которых распределена по закону (6):

$$p(\xi|H_1)=\frac{c^N}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\prod\limits_{i=1}^{N}\sigma_i}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\frac{\alpha\beta}{2\pi}\right)^N\prod_{i=1}^{N}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z_i^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{-2\xi_i z_i+z_i^2}{2\sigma_i^2}-\beta z_i^{\alpha}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y_i^2}}\left(\frac{1}{y_i}\right)^{\alpha}\exp\left(-\beta z_i^{\alpha}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)^{\alpha}\right)dy_i dz_i=\frac{c^N}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right|^{1/2}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\xi\right)\left(\frac{\alpha\beta}{2\pi}\right)^N\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\operatorname{diag}\left(\mathbf{z}\mathbf{z}^T\right)\right|^{\frac{\alpha-1}{2}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left(2\xi^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\mathbf{z}+\mathbf{z}^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\mathbf{z}\right)-\beta\left(\mathbf{z}^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\mathbf{z}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left|\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y_i^2}}\left(\frac{1}{y_i}\right)^{\alpha}\Bigg|_{i=1}^{N}\right)\right|\exp\left(-\beta\left(\mathbf{z}^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\mathbf{z}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tr}\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)^{\alpha}\Bigg|_{i=1}^{N}\right)\right)d\mathbf{z}d\mathbf{y},\quad(21)$$

где $|\cdot|$ означает вычисление детерминанта матрицы, заключенной в скобках; $\operatorname{diag}(\cdot)$ — диагональная матрица; $\operatorname{tr}(\cdot)$ означает след матрицы, заключенной в скобках; $\xi^T=(\xi_1,...,\xi_N)$, $\mathbf{z}^T=(z_1,...,z_N)$, $\mathbf{y}^T=(y_1,...,y_N)$.

Многомерная ПРВ белого гауссова шума определяется выражением

$$p(\xi|H_0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\prod\limits_{i=1}^{N}\sigma_i}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2\frac{1}{\sigma_i^2}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right|^{1/2}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\xi\right).\quad(22)$$

Используя формулы (21) и (22), получаем выражение для отношения правдоподобия:

$$\Lambda[\xi]=\frac{p(\xi|H_1)}{p(\xi|H_0)}=c^{Np}\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\xi\right)\left(\frac{\alpha\beta}{2\pi}\right)^N\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\operatorname{diag}\left(\mathbf{z}\mathbf{z}^T\right)\right|^{\frac{\alpha-1}{2}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left(2\xi^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\mathbf{z}+\mathbf{z}^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\mathbf{z}\right)-\beta\left(\mathbf{z}^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\mathbf{z}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left|\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y_i^2}}\left(\frac{1}{y_i}\right)^{\alpha}\Bigg|_{i=1}^{N}\right)\right|\times$$

$$\times\exp\left(-\beta\left(\mathbf{z}^T\left[\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\right)\Big|_{i=1}^{N}\right]\mathbf{z}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tr}\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)^{\alpha}\Bigg|_{i=1}^{N}\right)\right)d\mathbf{z}d\mathbf{y}. \qquad (23)$$

По аналогии с рассмотренными выше скалярными вариантами отношение правдоподобия можно представить в виде произведения:

$$\Lambda[\xi]=\prod_{i=1}^{N}\Lambda[\xi_i]=\prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\xi_i^k\right)\underset{<}{\geq}\gamma. \qquad (24)$$

Для N коррелированных выборок $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{U}\boldsymbol{\xi}$ можно записать выражение для условной модифицированной ПРВ в виде

$$p(\boldsymbol{\eta}|H_1)=\frac{c^N}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\Big|_{i=1}^{N}\right)\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}\right)\left(\frac{\alpha\beta}{2\pi}\right)^N\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\operatorname{diag}\left(\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1^T\right)\right|^{\frac{\alpha-1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(2\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_1^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_1\right)-\beta\left(\mathbf{z}_1^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_1\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left|\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y_i^2}}\left(\frac{1}{y_i}\right)^{\alpha}\Bigg|_{i=1}^{N}\right)\right|\exp\left(-\beta\left(\mathbf{z}_1^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_1\right)^{\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tr}\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)^{\alpha}\Bigg|_{i=1}^{N}\right)\right)d\mathbf{z}_1d\mathbf{y}_1, \qquad (25)$$

где $\mathbf{U}$ — ортогональная матрица, для которой справедливы условия $\mathbf{U}^T\mathbf{U}=\mathbf{U}\mathbf{U}^T=\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{I}$, $\mathbf{z}_1=\mathbf{U}\mathbf{z}$, $\mathbf{Q}=\mathbf{U}^T\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\Big|_{i=1}^{N}\right)^{-1}\mathbf{U}$.

Многомерная гауссова ПРВ определяется как

$$p\left(\boldsymbol{\eta}|H_0\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\operatorname{diag}\left(\sigma_i^2\Big|_{i=1}^{N}\right)\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}\right). \qquad (26)$$

Используя формулы (25) и (26), получаем выражение для отношения правдоподобия:

$$\Lambda[\boldsymbol{\eta}]=c^N\left(\frac{\alpha\beta}{2\pi}\right)^N\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\operatorname{diag}\left(\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1^T\right)\right|^{\frac{\alpha-1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(2\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_1^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_1\right)-\beta\left(\mathbf{z}_1^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_1\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left|\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y_i^2}}\left(\frac{1}{y_i}\right)^{\alpha}\Bigg|_{i=1}^{N}\right)\right|\exp\left(-\beta\left(\mathbf{z}_1^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_1\right)^{\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tr}\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)^{\alpha}\Bigg|_{i=1}^{N}\right)\right)d\mathbf{z}_1d\mathbf{y}_1. \qquad (27)$$

Формулу (27) можно записать в виде (24), используя разложение в степенной ряд, по крайней мере, тремя способами: первый основан на представлении $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{U}\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{z}_1=\mathbf{U}\mathbf{z}$, второй — на введении вектора $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}$, третий — на записи $\mathbf{z}_2 = \mathbf{Q}\mathbf{z}_1$. Все три варианта основаны на представлении $\mathbf{Q} = \mathbf{U}^T \operatorname{diag}\left(\sigma_i^2 \Big|_{i=1}^{N} \right)^{-1} \mathbf{U}$.

Аналогично рассмотренному во втором варианте случаю обнаружения сигнала с амплитудой, распределенной по закону Вейбулла, и равномерно распределенной фазой можно получить выражения для обнаружения сигналов с логарифмически нормальным и m-распределением (Накагами) амплитуды и равномерно распределенной фазой.

Заключение. Предложенный алгоритм оптимального обнаружения основан на выводе, что совместную условную МПРВ совокупности негауссова сигнала и помехи можно представить в виде произведения условной ПРВ помехи на условную МПРВ негауссова сигнала при условии, что помеха обязательно имеет место в принятом колебании. Это представление справедливо не только для устойчивых случайных величин и процессов, но и для неустойчивых распределений вероятностей. Для технической реализации устройств обнаружения негауссовых сигналов на фоне помех целесообразно использовать разложение в степенной ряд отношения правдоподобия.

Статья подготовлена по результатам исследований, выполненных в рамках реализации мероприятия 1.2.1 федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лоэв М.* Теория вероятностей / Пер. с англ.; Под ред. *Ю. В. Прохорова*. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 719 с.

2. *Хелстром К.* Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 430 с.

3. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценки и модуляции. Т.1. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции / Пер. с англ.; Под ред. *В. И. Тихонова*. М.: Сов. радио, 1972. 744 с.

4. *Бакулев П. А., Степин В. М.* Методы и устройства селекции движущихся целей. М.: Радио и связь, 1986. 288 с.

5. *Бачевский А. С., Бачевский С. В., Шаталов А. А., Шаталова В. А.* Математические модели сигналов, помех и шумов, принимаемых антенными системами в условиях многолучевого распространения электромагнитных волн // Тр. Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 80-летию вуза, „Системы и процессы управления и обработки информации“. СПб: Сев.-Зап. техн. ун-т, 2010. Ч. 1. С. 83—91.

Сведения об авторах

Бачевский Антон Сергеевич — Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра антенн и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры; ассистент; E-mail: antbachev@gmail.com

Шаталова Валентина Александровна — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра антенн и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры; E-mail: sh_alan@mail.ru

Рекомендована кафедрой радиолокации Санкт-Петербургского военного училища радиоэлектроники

Поступила в редакцию 23.08.11 г.