ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.271

В. Н. Арсеньев, А. Г. Кохановский, А. С. Фадеев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЯЗИ ИЗОХРОННЫХ ВАРИАЦИЙ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПАРАМЕТРОВ ЕЕ СОСТАВНЫХ ЧАСТЕЙ

Рассматривается задача построения линейной модели связи вариаций переменных состояния системы управления с отклонениями параметров ее составных частей от номинальных значений. Предложен подход к определению параметров модели, позволяющий повысить ее точность.

Ключевые слова: *система управления, переменные состояния, модель, параметры, точность.*

Введение. В практике создания летательных аппаратов (ЛА) достаточно часто возникает задача согласования характеристик разброса параметров системы управления с требованиями, предъявляемыми к точности ее функционирования [1]. Качество решения этой задачи зависит от точности модели, связывающей случайные параметры системы с переменными, характеризующими состояние ЛА в заданные моменты времени. К модели предъявляются два противоречивых требования: с одной стороны, она должна быть простой, а с другой — однозначно описывать связь характеристик разброса параметров с характеристиками точности системы управления. Построить такую модель можно на основе исходной модели, представляющей собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение системы. При этом показатель близости исходной и упрощенной моделей должен иметь вероятностный характер в силу случайной природы причин, вызывающих разброс переменных состояния системы в характерные моменты времени [2].

Постановка задачи. Достаточно в общем виде поведение системы управления может быть описано векторным нелинейным дифференциальным уравнением [3]

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{U}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, t), \;\; \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0\,, \tag{1}$$

где знаком „^“ отмечены величины, являющиеся случайными; $\hat{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}_{\text{н}}(t) + \Delta\hat{\mathbf{X}}(t) \in \mathbf{R}^n$ — вектор переменных состояния (в частном случае — фазовых координат) системы управления в момент времени *t*, здесь $\mathbf{X}_{\text{н}}(t)$ — его номинальное значение, $\Delta\hat{\mathbf{X}}(t)$ — вектор случайных отклонений (вариаций) переменных состояния системы относительно номинального значения $\mathbf{X}_{\text{н}}(t)$; $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^q$ — вектор-функция программ управления; $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}_{\text{н}} + \Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{R}^m$ — вектор случайных параметров системы, не зависящий от времени, здесь $\boldsymbol{\lambda}_{\text{н}}$ — его номинальное значение, $\Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ — вектор независимых случайных возмущений (отклонений параметров системы от номинальных значений), оказывающих влияние на движение ЛА; $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$ — вектор переменных состояния системы в начальный момент времени; $t \in (t_0, t_k)$ — время функционирования системы.

Закон распределения $\varphi_{\Delta\hat{\lambda}}(\Delta\boldsymbol{\lambda})$ вектора $\Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ полагается известным, причем его математическое ожидание $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\lambda}}=0$, а ковариационная матрица $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}=\mathrm{diag}\left\{D_{\Delta\hat{\lambda}_1}, D_{\Delta\hat{\lambda}_2}, ..., D_{\Delta\hat{\lambda}_m}\right\}$, где $D_{\Delta\hat{\lambda}_i}$, $i \in \overline{1,m}$, — дисперсии компонент вектора $\Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}$, характеризующие разброс параметров системы управления относительно номинальных значений $m \ge n$, где n — размерность вектора $\hat{\mathbf{X}}(t)$.

Пусть в заданный момент времени t_k вектор $\Delta\hat{\mathbf{X}}(t_k)$ распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $\mathbf{M}_{\Delta\hat{X}}=0$ и ковариационной матрицей $\mathbf{K}_{\Delta\hat{X}}$. Матрица $\mathbf{K}_{\Delta\hat{X}}$ характеризует разброс переменных состояния системы в момент t_k и рассматривается как ее точностная характеристика [4].

В качестве модели, связывающей отклонения параметров системы с вариациями ее состояния, предлагается использовать линейную зависимость

$$\Delta\hat{\mathbf{X}}_{\text{м}}=\mathbf{A}\Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}$ — $n \times m$-матрица коэффициентов, подлежащая определению.

Такой выбор модели обусловлен тем, что во многих практических задачах случайные отклонения параметров системы невелики, а зависимости вариаций переменных состояния системы от этих отклонений являются гладкими функциями.

Матрица коэффициентов модели (2) может быть определена по-разному. При этом особое значение имеет требование о близости оценок точности системы управления, получаемых на основе моделей (1) и (2) при одних и тех же характеристиках разброса параметров. Формально это требование имеет вид $\mathbf{K}_{\Delta\hat{X}}=\mathbf{K}_{\Delta\hat{X}_{\text{м}}}$ или, с учетом выражения (2),

$$\mathbf{K}_{\Delta\hat{X}}=\mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{A}^T. \tag{3}$$

Определение матрицы коэффициентов линейной модели. В некоторых случаях в качестве матрицы $\mathbf{A}$ может использоваться матрица чувствительности $\mathbf{H}$, элементами которой являются частные производные $\mathbf{H}_{ij}=\left.\dfrac{\partial\Delta\mathbf{X}_i(t_k)}{\partial\Delta\boldsymbol{\lambda}_j}\right|_{\Delta\boldsymbol{\lambda}=0}$, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,m}$ [1], и тогда модель принимает вид $\Delta\hat{\mathbf{X}}_{\text{н}}=\mathbf{H}\Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}$.

Такой выбор матрицы коэффициентов модели (2) отражает физическую зависимость вектора $\Delta\hat{\mathbf{X}}(t_k)$ от вектора $\Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}$, но при этом иногда не учитывается вероятностный характер связи между ними и не обеспечивается выполнение условия (3). Поэтому предлагается матрицу **A** определять исходя из условия ее близости к матрице **H** при строгом выполнении уравнения (3).

Тогда задача определения параметров модели (2) состоит в нахождении такой матрицы **A**, которая обеспечивает минимум функционала

$$\mathrm{tr}\left\{(\mathbf{A}-\mathbf{H})\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}(\mathbf{A}-\mathbf{H})^T\right\} \tag{4}$$

при условии (3).

Для ее решения используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Минимизируемая функция имеет вид

$$L_{\text{н}}=\mathrm{tr}\left\{(\mathbf{A}-\mathbf{H})\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}(\mathbf{A}-\mathbf{H})^T+\boldsymbol{\Lambda}\left(\mathbf{K}_{\Delta\hat{X}}-\mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{A}^T\right)\right\}, \tag{5}$$

где $n \times n$-матрица $\boldsymbol{\Lambda}$ является симметричной и состоит из подлежащих определению множителей Лагранжа.

Для вычисления частных производных от функции $L_{\text{н}}$ по матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{\Lambda}$ и получения необходимых условий минимума правая часть выражения (5) представляется в виде

$$L_{\text{н}} = \operatorname{tr}\left\{\mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{A}^T - \mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{H}^T + \mathbf{\Lambda}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{A}^T\right\}.$$

Тогда частные производные определяются выражениями

$$\frac{\partial L_{\text{н}}}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}} - 2\mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}} - 2\mathbf{\Lambda}\mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}; \quad \frac{\partial L_{\text{н}}}{\partial \mathbf{\Lambda}} = \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}} - \mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{A}^T,$$

а необходимые условия минимума $\dfrac{\partial L_{\text{н}}}{\partial \mathbf{A}} = 0$; $\dfrac{\partial L_{\text{н}}}{\partial \mathbf{\Lambda}} = 0$ трансформируются в уравнения

$$\mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}} - \mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}} = 0, \tag{6}$$

$$\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}} - \mathbf{A}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{A}^T = 0. \tag{7}$$

Из уравнения (6) следует

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{H}, \tag{8}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Подстановка полученного выражения в уравнение (7) дает

$$\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}} - (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{H}^T(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1} = 0$$

или

$$\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{H}^T(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}. \tag{9}$$

Следует заметить, что матрица $\mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{H}^T$ является положительно- (неотрицательно) определенной и может быть представлена в виде

$$\mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{H}^T = \mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T = \left(\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\right)^2, \tag{10}$$

где $\mathbf{D}_{\Delta\lambda}$ — диагональная матрица, а $\mathbf{S}_{\Delta\lambda}$ — ортогональная матрица, состоящие соответственно из собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathbf{H}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\lambda}}\mathbf{H}^T$.

В связи с этим формула (9) может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\left(\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\right)^2(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}.$$

Умножение обеих частей этого уравнения слева и справа на матрицу $\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T$ дает

$$\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T = \mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\left(\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\right)^2(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T$$

или

$$\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T = \left[\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\right]^2.$$

Поскольку матрица, стоящая в левой части, является неотрицательно- (положительно) определенной, то с помощью ортогонального преобразования она может быть приведена к диагональной матрице:

$$\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T = \mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}\mathbf{D}_{\Delta\mathbf{X}}\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}^T = \left(\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}\mathbf{D}_{\Delta\mathbf{X}}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}^T\right)^2, \tag{11}$$

где $\mathbf{D}_{\Delta\mathbf{X}}$ и $\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}$ — диагональная и ортогональная матрицы, состоящие соответственно из собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T$.

Тогда имеет место уравнение

$$\left(\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}\mathbf{D}_{\Delta\mathbf{X}}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}^T\right)^2 = \left[\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^T\right]^2,$$

из которого следует

$$\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}\mathbf{D}_{\Delta\mathbf{X}}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}^{T}=\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^{T}\left(\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^{T}$$

и

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}=\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{-1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^{T}\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}\mathbf{D}_{\Delta\mathbf{X}}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}^{T}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{-1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^{T}.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (8) дает формулу для вычисления матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{-1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^{T}\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}\mathbf{D}_{\Delta\mathbf{X}}^{1/2}\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{X}}^{T}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}\mathbf{D}_{\Delta\lambda}^{-1/2}\mathbf{S}_{\Delta\lambda}^{T}\mathbf{H}. \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что подстановка этой матрицы в уравнение (3) обращает его в тождество.

Матрица коэффициентов (12) достаточно близка к матрице чувствительности $\mathbf{H}$, но при этом обеспечивает равенство ковариационных матриц векторов вариаций фазовых координат моделей (1) и (2).

Пример. Рассмотрим свободное движение системы угловой стабилизации летательного аппарата в одной плоскости. Решение линеаризованного дифференциального уравнения

$$\Psi''+c_1\Psi'+c_2\Psi=0,\;\; \Psi(0)=\Psi_0=0{,}1;\; \Psi'(0)=0;\;\; c_1=2\,\text{с}^{-1};\;\; c_2=1{,}25\,\text{с}^{-2},$$

описывающего угловое движение по углу рыскания $\Psi(t)$, имеет вид

$$\Psi(t)=A_0e^{\lambda_1 t}\sin(\lambda_2 t+B_0), \tag{13}$$

где $\lambda_1=-1$; $\lambda_2=0{,}5$; $A_0=-\dfrac{\Psi_0\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\lambda_2}=-0{,}2236$; $B_0=\arcsin\left(\dfrac{-\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\right)=-0{,}4637$.

Примем, что под влиянием возмущающих факторов значения параметров λ_1 и λ_2 изменяются случайным образом относительно номинальных значений $\lambda_{1\text{н}}=-1$ и $\lambda_{2\text{н}}=0{,}5$, т.е. $\hat{\lambda}_1=\lambda_{1\text{н}}+\Delta\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2=\lambda_{2\text{н}}+\Delta\hat{\lambda}_2$, причем случайные отклонения $\Delta\hat{\lambda}_1$ и $\Delta\hat{\lambda}_2$ распределены равномерно на интервалах $[-a,\,a]$ и $[-b,\,b]$ соответственно. Вследствие этих причин в любой фиксированный момент времени t угол поворота летательного аппарата $\hat{\Psi}(t)=\Psi_\text{н}(t)+\Delta\hat{\Psi}(t)$ также будет изменяться по случайному закону, а номинальное движение аппарата будет описываться выражением (13). Математическое ожидание и второй начальный момент для $\hat{\Psi}(t)$ определяются по формулам

$$\mathbf{M}\left[\hat{\Psi}(t)\right]=\mathbf{M}\left[A_0e^{\hat{\lambda}_1 t}\sin(\hat{\lambda}_2 t+B_0)\right]=A_0\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}e^{(\lambda_{1\text{н}}+\Delta\lambda_1)t}d\Delta\lambda_1\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\sin(\lambda_{2\text{н}}t+\Delta\lambda_2 t+B_0)d\Delta\lambda_2=$$

$$=\frac{A_0e^{\lambda_{1\text{н}}t}\left(e^{at}-e^{-at}\right)\left[\cos(\lambda_{2\text{н}}t-bt+B_0)-\cos(\lambda_{2\text{н}}t+bt+B_0)\right]}{4abt^2};$$

$$\mathbf{M}\left[\hat{\Psi}^2(t)\right]=\mathbf{M}\left[A_0^2e^{2\hat{\lambda}_1 t}\sin^2(\hat{\lambda}_2 t+B_0)\right]=$$

$$=\frac{A_0^2e^{2\lambda_{1\text{н}}t}\left(e^{2at}-e^{-2at}\right)\left[4bt-\sin(2\lambda_{2\text{н}}t+2bt+2B_0)+\sin(2\lambda_{2\text{н}}t-2bt+2B_0)\right]}{32abt^2}.$$

Дисперсия угла $\hat{\Psi}(t)$ (отклонения $\Delta\hat{\Psi}(t)$) определяется в соответствии с выражением

$$D\left[\hat{\Psi}(t)\right]=D\left[\Delta\hat{\Psi}(t)\right]=\mathbf{M}\left[\hat{\Psi}^2(t)\right]-\mathbf{M}^2\left[\hat{\Psi}(t)\right]. \tag{14}$$

Пусть $t_k=10$ с, $a=0{,}1\cdot\left|\lambda_{1\text{н}}\right|=0{,}1$, $b=0{,}1\cdot\left|\lambda_{2\text{н}}\right|=0{,}05$, тогда $D\left(\Delta\hat{\Psi}\right)=4{,}0405\cdot10^{-11}$ рад^2.

Модель, описывающая зависимость отклонения $\Delta\hat{\Psi}$ от возмущений $\Delta\hat{\lambda}_1$ и $\Delta\hat{\lambda}_2$ и построенная на основе коэффициентов чувствительности, имеет вид $\Delta\hat{\Psi}_{н} = 9{,}9948 \cdot 10^{-5} \Delta\hat{\lambda}_1 + +1{,}7779 \cdot 10^{-5} \Delta\hat{\lambda}_2$. Дисперсия $D\left(\Delta\hat{\Psi}_{н}\right) = 3{,}3562 \cdot 10^{-11}$ рад^2, а ее относительная погрешность составляет 17 %.

Линеаризованная предложенным выше способом зависимость $\Delta\hat{\Psi}$ от $\Delta\hat{\lambda}_1$ и $\Delta\hat{\lambda}_2$ определяется следующим образом: $\Delta\hat{\Psi}_{м} = 1{,}0966 \cdot 10^{-4} \Delta\hat{\lambda}_1 + 1{,}9507 \cdot 10^{-5} \Delta\hat{\lambda}_2$. При этом дисперсия $D\left(\Delta\hat{\Psi}_{м}\right)$ совпадает с точным значением $D\left(\Delta\hat{\Psi}\right)$, что свидетельствует о существенно более высокой точности разработанной модели по сравнению с моделью, построенной на основе коэффициентов чувствительности. Более того, она позволяет прогнозировать значения дисперсии $D\left(\Delta\hat{\Psi}\right)$ при изменении характеристик возмущений $\Delta\hat{\lambda}_1$ и $\Delta\hat{\lambda}_2$ без проведения многократных испытаний модели (1).

Пусть диапазоны изменения возмущений увеличились на 10 % по сравнению с принятыми при построении моделей, т.е. $a = 0{,}11 \cdot \left|\lambda_{1н}\right| = 0{,}11$, $b = 0{,}11 \cdot \left|\lambda_{2н}\right| = 0{,}055$. В этом случае точное значение дисперсии, найденное по формуле (14), $D\left(\Delta\hat{\Psi}\right) = 5{,}0769 \cdot 10^{-11}$ рад^2. Полученная выше линеаризованная модель дает оценку дисперсии $D\left(\Delta\hat{\Psi}_{м}\right) = 4{,}889 \cdot 10^{-11}$ рад^2, относительная погрешность которой менее 4 %. Для сравнения следует заметить, что относительная погрешность оценки дисперсии, полученной по модели, построенной на основе коэффициентов чувствительности, превышает 20 %.

Заключение. Предложенная модель связи вариаций фазовых координат системы управления ЛА с вектором отклонений ее параметров от расчетных значений однозначно отражает вероятностный характер этой зависимости. Разработанную модель целесообразно использовать при решении прямых задач, связанных с исследованием влияния характеристик разброса параметров системы управления на точность системы. Она оказывается весьма полезной и при решении обратных задач, когда по заданным требованиям к точности функционирования системы необходимо найти допустимые диапазоны изменений ее параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юсупов Р.М., Розенвассер Е. Н.* Чувствительность систем управления М.: Наука, 1981. 464 с.

2. *Арсеньев В. Н.* Определение требований к характеристикам разброса параметров системы управления летательного аппарата // Изв. вузов. Приборостроение. 1996. Т. 39, № 8—9.

3. *Росин М. Ф., Булыгин В. С.* Статистическая динамика и теория эффективности систем управления М.: Машиностроение, 1981. 312 с.

4. *Миронов В. И.* Задача приведения вариаций фазовых координат динамических систем к заданным условиям испытаний // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1970. № 3.

Сведения об авторах

Владимир Николаевич Арсеньев — д-р техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра автоматики и электроники, Санкт-Петербург; E-mail: vladar56@mail.ru

Андрей Геннадьевич Кохановский — канд. техн. наук; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург; нач. отдела; E-mail: koxa.and.68@mail.ru

Александр Сергеевич Фадеев — канд. техн. наук; Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры, Москва; генеральный директор

Рекомендована кафедрой
автоматики и электроники

Поступила в редакцию
10.07.12 г.