УДК 519.7: 658.512.2

А. Б. Бушуев, О. К. Мансурова

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ С ГЛАДКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ*

Рассматривается объект управления — нелинейный компенсационный гомеостат как математическая модель конфликтных ситуаций между двумя каналами. Для синтеза управлений, разрешающих конфликт, используются потенциальные функции канонических катастроф.

Ключевые слова: *канонические катастрофы, гиперболическая омбилика, компенсационный гомеостат.*

Рассмотрим класс двухканальных систем управления, каждый из каналов которых задается дифференциальным уравнением первого порядка с правой частью вида

$$F(x,y,a)=\sum_{n}\sum_{m}\sum_{i}a_i x^n y^m, \qquad (1)$$

где a_i — коэффициенты (i=0,1,2,…), x=$x(t)$ и y=$y(t)$ — координаты системы, $x\subset R^1$, $y\subset R^1$ (n=0,1,2,…; m=0,1,2,…), t — время.

Целью работы является синтез алгоритма управления, обеспечивающего разрешение конфликта между координатами $x(t)$ и $y(t)$ для типовых ситуаций: конкуренции, нейтралитета, союзничества, конфронтации и т.п. [1]. Управление формируется в виде нелинейной функции от координат, в качестве которой выбирается потенциальная функция одной из канонических катастроф Р. Тома [2].

Известны примеры использования канонических катастроф для синтеза управления в нелинейном компенсационном гомеостате [3], математическая модель которого задается уравнением (1). Управление синтезируется на основе несимметричной катастрофы типа „эллиптическая омбилика“. Сигнал управления складывается из двух составляющих: „мягкую“ часть управления вырабатывает командный генератор, а „жесткая“ часть формируется в виде обратной связи от координат управляемого гомеостата.

Возможно использовать симметричную каноническую катастрофу типа „гиперболическая омбилика“ при синтезе управления для линейных стационарных систем, матрица объекта управления которых представляется в нормальной жордановой форме [4]. Для каждого собственного движения, задаваемого клеткой жордановой матрицы, формируется замкнутое управление в виде потенциальной функции канонической катастрофы типа „гиперболическая омбилика“. В качестве координат потенциальной функции выбираются переменные состояния соответствующей клетки жордановой матрицы. Коэффициенты регулятора выбираются из условия обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы. Как отмечается в работе [4], такой закон управления обладает робастной устойчивостью в случае неопределенности задания как структуры, так и параметров объекта управления.

Для моделирования типовых ситуаций взаимной работы каналов используются градиентные системы, у которых антиградиент потенциальной функции системы направлен по вектору скорости координат, т.е.

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0553).

$$\frac{\partial H(x,y,a)}{\partial x} = -\dot{x}, \quad \frac{\partial H(x,y,a)}{\partial y} = -\dot{y}\,, \qquad (2)$$

где $H(x,y,a)$ — потенциальная функция системы (1). Коэффициент пропорциональности между правой и левой частями в уравнениях (2) для упрощения принят единичным. Для градиентных систем переходные процессы по координатам x=$x(t)$ и y=$y(t)$ при выборе численных значений коэффициентов a_i системы, обеспечивающих условие устойчивости при задании антисимметричных начальных условий $x(0)= - y(0)$, получаются плавными, одна из координат располагается в первом, а другая — в четвертом квадранте плоскости координат. Та или иная типовая ситуация обеспечивается выбором знаков коэффициентов a_i обратных и перекрестных связей в каналах системы (1). При n=m=0 в (1) в качестве слагаемых используются коэффициенты a_0, задающие вынужденное движение и рассматриваемые как управление, подаваемое на систему (1), например, для канала с координатой $x(t)$:

$$\dot{x} = \sum_{n+1}\sum_{m+1}\sum_{i+1} a_i x^n y^m + a_0\,. \qquad (3)$$

Выберем в качестве управления потенциальную функцию одной из канонических катастроф и подадим его на систему (3). В качестве координат x и y канонической катастрофы выбираем координаты системы (1) x=$x(t)$ и y=$y(t)$. Тогда уравнение правой части замкнутой системы в каждом канале будет иметь вид

$$\dot{x} = \sum_{n+1}\sum_{m+1}\sum_{i+1} a_i x^n y^m + a_0 V(x,y,\lambda)\,, \qquad (4)$$

где $V(x,y,\lambda)$ — потенциальная функция канонической катастрофы, λ — вектор управляющих параметров катастрофы λ_j (j=1, 2, …, k), k — число управляющих параметров катастрофы. Потенциальные функции некоторых канонических катастроф приведены в таблице.

k	Потенциальная функция $V(x,y,\lambda)$	Катастрофа
1	$\frac{x^3}{3} + \lambda_1 x$	Складка
2	$\frac{x^4}{4} + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 x$	Сборка
3	$x^3 + y^3 + \lambda_1 xy + \lambda_2 x + \lambda_3 y$	Гиперболическая омбилика
3	$x_1^3 - 3xy^2 + \lambda_1 (x^2 + y^2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$	Эллиптическая омбилика

Приравняв выражение (4) к нулю, получим нелинейные алгебраические уравнения для определения стационарных состояний системы

$$\sum_{n+1}\sum_{m+1}\sum_{i+1} a_i x^n y^m + V(x,y,\lambda) = 0\,,$$

связывающих параметры a_i (4) с управляющими параметрами канонической катастрофы.

Для синтеза регулятора выбираем значения управляющих параметров λ, обеспечивающие устойчивость заданного конечного состояния равновесия.

Рассмотрим пример синтеза управлений для компенсационного гомеостата, моделирующего стереотип конкуренции антагонистов [5]. Уравнения антагонистов задаются системой (1):

$$\dot{x} = a_2 x^2 + a_1 y + a_0, \quad \dot{y} = a_5 y^2 + a_4 x + a_3. \tag{5}$$

Здесь первое слагаемое в правой части первого уравнения получается при i=2, n=2, m=0; второе — при i=1, n=0, m=1; третье — при i=0, n=0, m=0. Для второго уравнения (5) первое слагаемое получается при i=5, n=0, m=2; второе — при i=4, n=1, m=0; третье — при i=3, n=0, m=0.

Сначала рассмотрим собственное движение антагонистов при a_0=a_3 =0 из начальных условий $x(0) = -y(0) = -0{,}1$. Для обеспечения устойчивости заданных состояний равновесия $x(\infty) = -y(\infty) = -1$ выбираем значения a_1=a_4 = –3, a_2= –a_5 =3. График переходного процесса собственного движения приведен на рис. 1, *а*.

Как видно из рисунка, обе координаты строго антисимметричны, и явление конкуренции не проявляется. При подаче на вход канала $y(t)$ ресурса питания конкурентов в виде ступенчатого воздействия (a_3 =1(t)) проявляется явление конкуренции: ресурс распределяется неравномерно, поскольку $x(\infty) = -1{,}09$, $y(\infty) = 1{,}19$ (рис. 1, *б*).

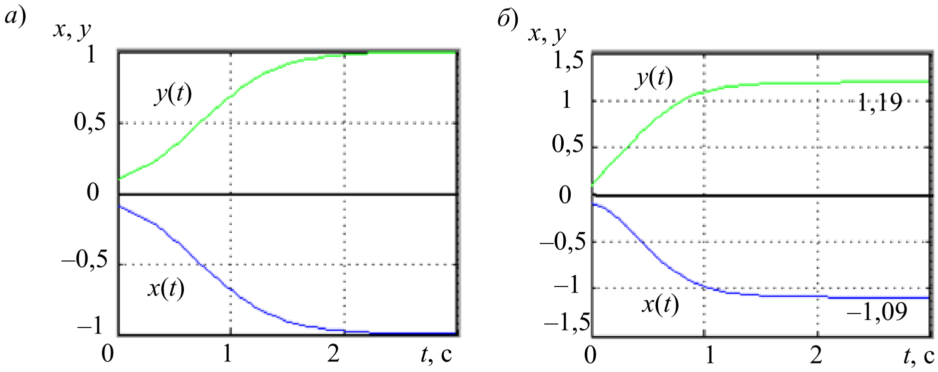

Рис. 1

Синтезируем регулятор, обеспечивающий разрешение конфликта между конкурентами, т.е. получим управление, которое переводит систему (5) из конкурентного $x = -1{,}09$, $y = 1{,}19$ в устойчивое стационарное состояние x=y=0. В качестве управления выберем потенциальную функцию катастрофы типа „сборка". Подставив $V(x, y, \lambda)$ в (5), получим

$$\dot{x} = a_2 x^2 + a_1 y + a_0\left(\frac{x^4}{4} + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 x\right), \quad \dot{y} = a_5 y^2 + a_4 x + a_3\left(\frac{y^4}{4} + \lambda_3 \frac{y^2}{2} + \lambda_4 y\right). \tag{6}$$

Найдем стационарные состояния из системы уравнений

$$0 = a_2 x^2 + a_1 y + a_0\left(\frac{x^4}{4} + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 x\right), \quad 0 = a_5 y^2 + a_4 x + a_3\left(\frac{y^4}{4} + \lambda_3 \frac{y^2}{2} + \lambda_4 y\right). \tag{7}$$

Выберем следующие соотношения $\lambda_1 = -\frac{2a_2}{a_0}, \lambda_2 = -\frac{a_1 y}{a_0 x}, \lambda_3 = -\frac{2a_5}{a_3}, \lambda_4 = -\frac{a_4 x}{a_3 y}$. Тогда получим систему $0 = a_0 \frac{x^4}{4}, 0 = a_3 \frac{y^4}{4}$, в которой имеются четыре пары нулевых корней x=0 и y=0. Знак управляющего сигнала можно задать знаком коэффициентов a_0 и a_3 исходя из условий обеспечения устойчивости стационарных состояний x=y=0 при заданных начальных условиях x=–1,09 и y=1,19.

График затухания конфликта приведен на рис. 2 для a_0=32 и a_3 =–32. Как видно, графики конфликтующих сторон асимптотически сходятся к нулю.

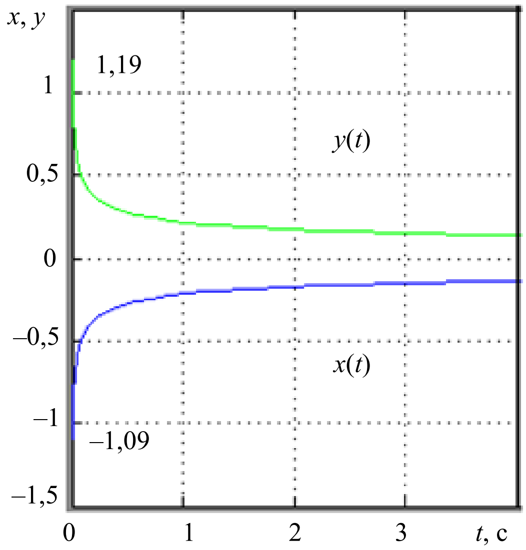

Рис. 2

Выбор канонической катастрофы для синтеза управления зависит от вида нелинейной функции правой части уравнения (1) гомеостата. Необходимо выбирать потенциальную функцию катастрофы, старшая степень координаты которой хотя бы на порядок выше старшей степени нелинейной функции (1). Для разрешения конфликта назначением управляющих параметров λ необходимо компенсировать первые степени координат состояния системы x и y и обеспечить условие устойчивости стационарных состояний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горский Ю. М.* Основы гомеостатики (Гармония и дисгармония живых, природных, социальных и искусственных систем). Иркутск: Изд-во ИГЭА, 1998. 337 с.
2. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
3. *Бушуев А. Б.* Математическое моделирование конфликтов в техническом творчестве // Науч.-техн. вестн. СПбГУ ИТМО. Программирование, управление и информационные технологии. 2005. Вып. 19. С. 26—32.
4. *Жуматаева Ж. Е., Бейсенби М. А.* Построение систем управления в классе трехпараметрических структурно-устойчивых отображений // Вестн. Казахского национального технического университета. 2010.
5. *Бушуев А. Б.* Математическое моделирование процессов технического творчества. СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. 306 с.

Сведения об авторах

Александр Борисович Бушуев — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики

Ольга Карибековна Мансурова — канд. техн. наук; Национальный минерально-сырьевой университет „Горный“, Санкт-Петербург; доцент; E-mail: erke7@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
13.12.12 г.