УДК 681.51

С. Г. Чеботарев, А. С. Кремлев

СИНТЕЗ ИНТЕРВАЛЬНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ*

Проанализированы условия, при которых возможно построение интервального наблюдателя, позволяющего определить область оценок переменных состояния системы.

Ключевые слова: *интервальный наблюдатель, мецлеровость, параметрическая неопределенность.*

Введение. В теории автоматического управления важную роль играет идентификация параметров системы. Поэтому задача оценки неизмеряемого вектора состояния очень актуальна, и ее решение требуется во многих случаях [1—3].

В некоторых ситуациях, например при наличии в описании системы параметрических неопределенностей, невозможно использовать классические методы построения устройства оценки неизвестных неизмеряемых параметров исследуемой системы (наблюдателей), оценки которых сходятся к точному значению состояния при отсутствии шума. В связи с этим необходимо синтезировать интервальный наблюдатель, обеспечивающий оценивание множества допустимых значений вектора состояния системы.

Задача оценки неизмеряемого вектора состояний может быть решена различными способами. Говоря об интервальных методах оценки, можно отметить различные подходы к построению подобных наблюдателей [4—7]. В настоящей статье рассматривается подход к построению интервального наблюдателя, основанный на теории монотонных систем [4, 7]. Для нелинейных систем данный подход был расширен в работе [8] на случай использования LPV-представления (Linear Parameter Varying) с известными минорной и мажорной матрицами, а в [9] — на случай наблюдаемых нелинейных систем.

Рассмотрим случай, когда неопределенности в описании системы являются детерминированными неизвестным функциями, зависящими от времени. Тогда, при определенных условиях, возможно оценить границы ненаблюдаемых переменных, используя „робастный“ метод оценки параметров. На выходе интервального наблюдателя получаются два вектора оценок: минимальных и максимальных значений для каждого элемента вектора состояний объекта.

Решение задачи возможно при соблюдении некоторых допущений. Одним из самых сложных при построении интервального наблюдателя является требование мецлеровости матрицы [9, 10].

Однако для построения и корректной работы интервального устройства оценки неизвестных неизмеряемых параметров исследуемой системы необходимо выполнять условие ограниченности траекторий, получаемых на выходе верхнего и нижнего наблюдателей. Очевидно, что требуется доказать ограниченность этих траекторий с помощью методов теории автоматического управления.

В связи с этим развитие методов интервальной оценки и алгоритмов построения интервальных наблюдателей для систем, обладающих параметрической неопределенностью, по-прежнему остается актуальной задачей.

---

* Исследование выполнено при поддержке министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0421 „Разработка автономной бортовой системы навигации и управления многофункциональными мультиротационными летательными аппаратами“.

Постановка задачи. При выполнении условия мецлеровости [11—13] для матриц, описывающих рассматриваемую систему, полученный интервал оценок переменных состояния системы содержит в себе реальные значения переменных состояния. Однако это не гарантирует ограниченности решений уравнений, описывающих наблюдатели.

Применительно к устойчивым линейным системам кроме условия мецлеровости матрицы, описывающие динамику наблюдателей, также должны удовлетворять условиям гурвицевости. Обеспечение и проверка выполнения указанных условий является основной задачей при построении интервального наблюдателя.

Основной результат. Рассмотрим устойчивую систему общего вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A\big(p(t)\big)x + d(t,y,u), \\ y &= Cx, \end{aligned}\right\} \quad p(t) \in \mathbb{R},$$

где $x \in \mathbb{R}^{+}$, $y \in \mathbb{R}^{p}$, $u \in \mathbb{R}^{m}$ — это векторы переменных состояния, выход системы и управляющее воздействие соответственно; $A\big(p(t)\big)$ — матрица динамики системы, зависящая от неизвестного параметра $p(t)$:

$$\underline{d}(t,y,u) \le d(t,y,u) \le \overline{d}(t,y,u). \tag{1}$$

Граничные значения параметра p известны:

$$\underline{A} \le A\big(p(t)\big) \le \overline{A}. \tag{2}$$

В рассматриваемом случае существует вектор коэффициентов усиления наблюдателя L такой, что:

$$L : A\big(p(t)\big) - LC \in M, \tag{3}$$

эта система обладает свойством гурвицевости.

Отсюда следует, что системы

$$\underline{A} - LC, \overline{A} - LC \in M \tag{4}$$

также обладают свойством гурвицевости.

Будем рассматривать случай, когда состояния системы неотрицательны, т.е. $x(t) \ge 0$. При этом траектории, полученные решением дифференциальных уравнений, описывающих систему, и интервальные наблюдатели не пересекают ось абсцисс. В противном случае, при $x(t) \in \mathbb{R}^{n}$, требовались бы дополнительные действия для сохранения относительной ориентации полученных траекторий оценки и реальных значений переменных состояния системы.

Запишем уравнения, описывающие верхний и нижний интервальные наблюдатели

$$\left.\begin{aligned} \dot{\overline{x}} &= \overline{A}\overline{x} + \overline{d}(t,y,u) + L(C\overline{x} - y), \\ \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{d}(t,y,u) + L(y - C\underline{x}), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\overline{x}$, $\underline{x}$ — переменные состояния верхнего и нижнего наблюдателей соответственно.

Проверка условий мецлеровости. Как уже отмечалось, для построения интервального наблюдателя необходима мецлерова матрица. Проверим это условие, проанализировав уравнения ошибки для наблюдателей (5):

$$\left.\begin{aligned} \overline{e} &= \overline{x} - x, \\ \underline{e} &= x - \underline{x}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\overline{e}$, $\underline{e}$ — векторы ошибки для верхнего и нижнего наблюдателя соответственно.

Используя системы (5) и (6), найдем уравнения, описывающие динамку ошибки для рассматриваемых наблюдателей:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\overline{e}} &= \dot{\overline{x}} - \dot{x},\\ \dot{\underline{e}} &= \dot{x} - \dot{\underline{x}}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Производные ошибок для системы (7) будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\dot{\overline{e}} = \overline{A}\overline{x} + \overline{d}(t,y,u) + L(y - C\overline{x}) - A(p(t))x - d(t,y,u) =\\ = \left[A(p(t)) - LC\right]\overline{e} + [\overline{A} - A(p(t))]\overline{x} + \left[\overline{d}(t,y,u) - d(t,y,u)\right],\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\dot{\underline{e}} = A(p(t))x + d(t,y,u) - \underline{A}\underline{x} - \underline{d}(t,y,u) - L(y - C\underline{x}) =\\ = \left[A(p(t)) - LC\right]\underline{e} + [A(p(t)) - \underline{A}]\underline{x} + \left[d(t,y,u) - \underline{d}(t,y,u)\right].\end{gathered} \tag{9}$$

Проанализируем полученные выражения. Слагаемое $A(p(t)) - LC$ положительно, с учетом исходных данных (3); слагаемые $\overline{A} - A(p(t))$ и $A(p(t)) - \underline{A}$ в (8) и (9) также обладают данным свойством (см. (2)); слагаемые $\overline{d}(t,y,u) - d(t,y,u)$ и $d(t,y,u) - \underline{d}(t,y,u)$ положительны исходя из соотношения (1). Учитывая, что над слагаемыми производится операция сложения, можно сделать вывод о том, что производные ошибки как для верхнего, так и для нижнего наблюдателя положительны. Тогда, если дополнительно указать, что начальное значение ошибок неотрицательно

$$\overline{e}(0) \geq 0;\ \ \underline{e}(0) \geq 0,$$

можно заключить, что для любого t

$$\overline{e}(t) \geq 0 \text{ и } \underline{e}(t) \geq 0.$$

Проверка устойчивости границ интервала оценки. Представим систему наблюдателей (5) в матричном виде:

$$X = \begin{bmatrix}\underline{x}\\ \overline{x}\end{bmatrix};$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix}\underline{A} - LC & 0\\ 0 & \overline{A} - LC\end{bmatrix}X + \begin{bmatrix}L\\ L\end{bmatrix}y + \begin{bmatrix}\underline{d}(t,y,u)\\ \overline{d}(t,y,u)\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Введем обозначения:

$$A^* = \begin{bmatrix}\underline{A} - LC & 0\\ 0 & \overline{A} - LC\end{bmatrix};\ \Lambda = \begin{bmatrix}L\\ L\end{bmatrix};\ D(t,y,u) = \begin{bmatrix}\underline{d}(t,y,u)\\ \overline{d}(t,y,u)\end{bmatrix}, \tag{11}$$

тогда выражение (10) с учетом (11) будет иметь вид

$$\dot{X} = A^* X + \Lambda y + D(t,y,u). \tag{12}$$

Задача построения сводится к анализу (12) устойчивости и ограниченности решений.

Выходной сигнал y неявно зависит от значения x:

$$|y| \leq |C|\left(|\underline{x}| + |\overline{x}|\right).$$

Проанализируем следующую систему:

$$\dot{X} = A^* X + \Lambda y,\ \text{где}\ \ |y| \leq |C|\left(|\underline{x}| + |\overline{x}|\right),$$

для доказательства ее устойчивости рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = X^T P X,$$

где матрица $P = P^T > 0$, тогда ее производная будет вида:

$$\dot{V} = X^T\left(A^{*T}P + PA^*\right)X + 2X^T P \Lambda y \leq$$

$$\le X^T\left(A^{*T}P + PA^* + P^2\right)X + y^T\Lambda^T\Lambda y \le$$

$$\le X^T\left(A^{*T}P + PA^* + P^2 + 4\left|c\right|^2\Lambda^2 I\right)X.$$

Используя решение уравнения Риккати, можно найти такие значения Λ, C, A^*, что для рассматриваемой системы будут выполняться условия устойчивости.

Пример. Построим интервальный наблюдатель на примере линейной системы второго порядка с неизвестным неизмеряемым параметром, изменяющимся по нелинейному закону:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= A(p,t)x + Bu(t),\\ y &= Cx,\end{aligned}\right\}\; A(p,t) = \begin{bmatrix}-4 & 1\\ p(t) & -4\end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\; C = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},\; p_{\min} = 3,\; p_{\max} = 5.$$

Значение параметра p изменяется следующим образом:

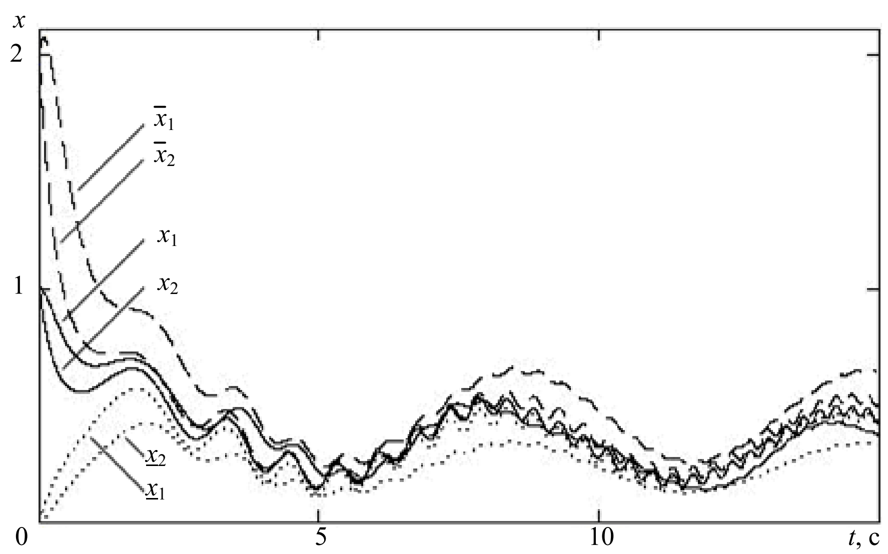
$$p(t) = p_{\min} + 0{,}5\left(p_{\max} - p_{\min}\right)\left(0{,}5\sin 2t + 0{,}5\sin 0{,}38t + 1\right).$$

Выберем $L = \begin{bmatrix}-0{,}05\\ 0{,}1\end{bmatrix}$. Решением уравнения Риккати для заданных значений является матрица P, собственные значения которой положительны:

$$\sigma(P) = \left[0{,}0037;\ 0{,}0042;\ 0{,}0122;\ 0{,}0191\right].$$

Матрица P положительно определена, из чего можно сделать вывод об устойчивости траекторий, полученных решением дифференциальных уравнений, описывающих интервальный наблюдатель.

Графики границ оценок интервального наблюдателя и переменных состояния системы представлены на рисунке.



Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности эффективного использования предложенного подхода при построении интервального наблюдателя для линейных систем с переменными параметрами. Целесообразно дальнейшее его развитие для применения в системах с разными комбинациями свойств и входных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meurer T., Graichen K., Gilles E.-D.* Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2005. Vol. 322. P. 422.

2. *Fossen T. I., Nijmeijer H.* New Directions in Nonlinear Observer Design. Springer, 1999. 525 p.

3. Nonlinear Observers and Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences / Ed. by *G. Besançon* Springer, 2007. Vol. 363. 224 p.

4. *Bernard O., Gouzé J. L.* Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models // J. Process Control. 2004. Vol. 14. P. 765—774.

5. *Jaulin L.* Nonlinear bounded-error state estimation of continuous time systems // Automatica. 2002. Vol. 38, N 2. P. 1079—1082.

6. *Kieffer M., Walter E.* Guaranteed nonlinear state estimator for cooperative systems // Numerical Algorithms. 2004. Vol. 37. P. 187—198.

7. *Moisan M., Bernard O., Gouzé J. L.* Near optimal interval observers bundle for uncertain bio-reactors // Automatica. 2009. Vol. 45, N 1. P. 291—295.

8. *Raïssi T., Videau G., Zolghadri A.* Interval observers design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems // Automatica. 2010. Vol. 46, N 3. P. 518—527.

9. *Raïssi T., Efimov D., Zolghadri A.* Interval state estimation for a class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2012. Vol. 57, N 1. P. 260—265.

10. *Mazenc F., Bernard O.* Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances // Automatica. 2011. Vol. 47, N 1. P. 140—147.

11. *Smith H. L.* Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems of Surveys and Monographs // AMS. Providence, 1995. Vol. 41. P. 174.

12. *Efimov D., Raïssi T., Chebotarev S., Zolghadri A.* Interval State Observer for Nonlinear Time Varying Systems // Automatica. 2013. Vol. 49(1). P. 200—205.

13. *Чеботарев С. Г., Кремлев А. С.* Анализ линейных систем с переменными параметрами для синтеза интервальных наблюдателей // Науч.-техн. вестн. информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 06(82). С. 50—53.

Сведения об авторах

Станислав Геннадьевич Чеботарев — аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики;
E-mail: freest5@gmail.com

Артем Сергеевич Кремлев — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; доцент;
E-mail: kremlev_artem@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
13.12.12 г.