

---

---

# УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ В РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

---

---

УДК 681.5.03

А. А. ПЫРКИН, Т. А. МАЛЬЦЕВА, Д. В. ЛАБАДИН, М. О. СУРОВ, А. А. БОБЦОВ

## СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПРОЩЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ\*

Представлен алгоритм синтеза системы управления квадрокоптером с использованием упрощенной математической модели. По сравнению с известными алгоритмами представленный алгоритм отличается простой реализацией.

*Ключевые слова:* квадрокоптер, упрощение модели, многороторный летательный аппарат.

**Введение.** В статье представлен алгоритм синтеза системы управления мультироторного летательного аппарата на примере квадрокоптера — вертолета с четырьмя симметрично расположенными роторами. Он управляется путем изменения скорости вращения роторов и, таким образом, изменения подъемной силы. Квадрокоптер является самым маневренным вертикально взлетающим летательным аппаратом [1] и относится к классу автономных роботов, движение которых происходит без контакта с опорной поверхностью. Как объект управления квадрокоптер является многоканальной существенно нелинейной динамической системой [2].

**Постановка задачи.** Рассматривается задача синтеза алгоритма управления летательным аппаратом типа „квадрокоптер“ в режиме слежения. Заданы три линейные координаты и угол рысканья. Необходимо разработать алгоритм синтеза законов управления многоканальной робототехнической системой, обеспечивающий стабилизацию квадрокоптера в заданной точке пространства с заданной ориентацией.

Положение летательного аппарата относительно неподвижной системы координат может быть задано вектором смещения с компонентами  $(x, y, z)$  и углами Эйлера  $(\theta, \psi, \varphi)$ , представляющими собой тангаж, крен и рыскание [3—5]. Поворот тела вокруг декартовых осей координат в трехмерном пространстве может быть представлен в виде  $ZYX$ -преобразования:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \varphi & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Трехмерная схема квадрокоптера  $(x_0, y_0, z_0)$  представлена на рис. 1, где  $F_i$  —  $z$ -

---

\* Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг. (соглашение 14.В37.21.0406).

компонент вектора подъемной силы  $i$ -го ротора (остальные компоненты, согласно выбранным модельным приближениям, равны нулю),  $T_i$  — скорость вращения роторов. Полагаем, что 1-й и 3-й роторы вращаются в направлении по часовой стрелки, 2-й и 4-й — против. Введем следующие обозначения физических параметров квадрокоптера:  $m$  — масса;  $J_1, J_2, J_3$  — главные моменты инерции. Предполагаем, что все роторы вращаются в одной плоскости, оси вращения перпендикулярны плоскости  $x_{b0}, y_{b0}$  и пересекают её в точках  $(l, -l, 0)$ ,  $(l, l, 0)$ ,  $(-l, l, 0)$ ,  $(-l, -l, 0)$ . Воспользуемся упрощенной динамической моделью движения квадрокоптера [4]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} m &= \left( \sum F_i \right) (\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi), \\ \ddot{y} m &= \left( \sum F_i \right) (\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\ddot{z} m = \left( \sum F_i \right) (\cos \theta \cos \psi) - mg, \quad \ddot{\theta} J_1 = l (-F_1 - F_2 + F_3 + F_4), \quad (3)$$

$$\ddot{\psi} J_2 = l (-F_1 + F_2 + F_3 - F_4), \quad \ddot{\varphi} J_3 = C (F_1 - F_2 + F_3 - F_4). \quad (4)$$

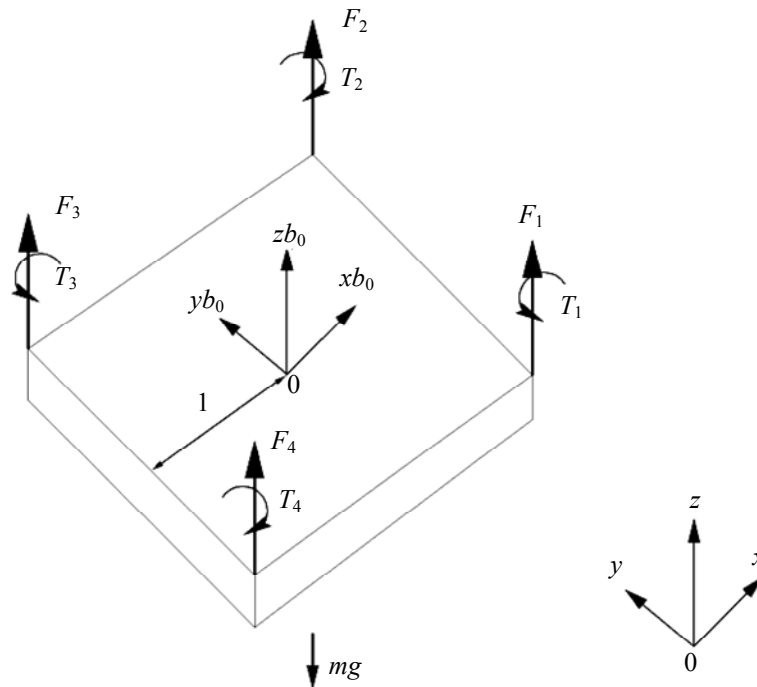


Рис. 1

Значение линейного коэффициента может быть получено экспериментально [5].

**Упрощение модели.** Рассмотрим методику декомпозиции сложной динамической модели на независимые линейные модели и статические нелинейные соотношения. Такое разложение системы на независимые составляющие крайне необходимо на этапе синтеза регуляторов. Непосредственный синтез регуляторов для двигателей квадрокоптера на основе сложной нелинейной модели представляет существенные трудности при анализе замкнутой системы.

Введем в рассмотрение виртуальные управления, которые представляют собой линейные комбинации  $F_i$ :

$$U_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4, \quad U_2 = -F_1 - F_2 + F_3 + F_4, \quad (5)$$

$$U_3 = -F_1 + F_2 + F_3 - F_4, \quad U_4 = F_1 - F_2 + F_3 - F_4. \quad (6)$$

Эти виртуальные управления будут синтезироваться на основе заданных координат квадрокоптера в пространстве, а значения  $F_i$  будем рассчитывать на основе решения линейной системы уравнений (5), (6).

Подставив уравнения (5), (6) в систему (2)—(4), получим первую упрощенную модель:

$$m \ddot{x} = U_1 (\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi), \quad m \ddot{y} = U_1 (\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi), \quad (7)$$

$$m \ddot{z} = U_1 (\cos \varphi \cos \psi) - m g, \quad \ddot{\theta} J_1 = l U_2, \quad \ddot{\psi} J_2 = l U_3, \quad \ddot{\varphi} J_3 = C U_4. \quad (8)$$

Рассмотрим отдельно уравнения (7), переписав их в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} m \ddot{x} \\ m \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \sin \theta \cos \psi \\ U_1 \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Введем две вспомогательные переменные, которые будут выполнять роль виртуальных управлений:

$$U_5 = U_1 \sin \theta \cos \psi, \quad U_6 = U_1 \sin \psi. \quad (10)$$

Перепишем (8) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} m \ddot{x} \\ m \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

По условию задачи необходимо управлять положением летательного аппарата в системе координат, связанной с Землей. Однако для удобства рассмотрим вспомогательную декартову систему координат, которая связана с квадрокоптером (рис. 2).

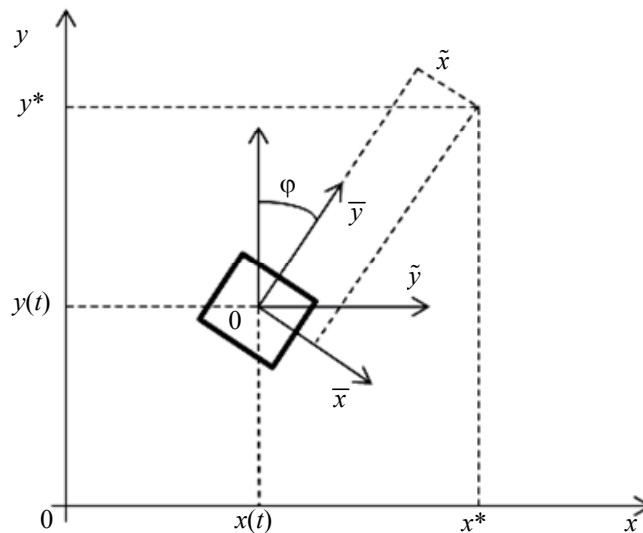


Рис. 2

Введем в рассмотрение координаты перемещения в продольном  $\bar{x}$  и поперечном  $\bar{y}$  направлениях. В самом деле, переход в заданную точку квадрокоптер можно представить в виде не зависящих друг от друга перемещений вдоль координат  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Запишем уравнения связи координат:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = T(\varphi) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

В уравнении (12) матрица  $H(\varphi)$  является кососимметрической и обладает известным свойством:  $H(\varphi)^{-1} = H(\varphi)$ , откуда

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Модель перемещения в координатах  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  получим из (12) и (13):

$$\begin{bmatrix} m \ddot{x} \\ m \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Основная цель квадрокоптера — перемещение в пространстве из точки с координатами  $(x_1, y_1, z_1, \varphi_1)$  в точку  $(x_2, y_2, z_2, \varphi_2)$ . Понятно, что изменение крена или тангажа — это вспомогательный процесс для перемещения в координатах  $x$  и  $y$ . Изменение этих величин должно быть разрешено в очень малом диапазоне, например  $[-\pi/6; \pi/6]$ . В этом случае можно воспользоваться приближенными уравнениями:  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ , если  $|\alpha| \leq \pi/6$ . Далее имеем:

$$m \ddot{z} = U_1 - mg, \quad U_5 = U_1 \theta, \quad U_6 = U_1 \psi. \quad (15)$$

Теперь представим алгоритм синтеза регулятора квадрокоптером в задаче стабилизации заданной точки в пространстве.

#### Алгоритм синтеза системы управления

1. Измерить текущие координаты квадрокоптера:  $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ .
  2. Получить координаты заданной точки:  $x^*, y^*, z^*, \varphi^*$ .
  3. По рассогласованию  $\tilde{z} = z - z^*$  синтезировать закон управления  $U_1$  на основе первого уравнения (15). Например, ПД-регулятор или последовательный компенсатор [6—8]. В обоих случаях следует ввести интегральную составляющую для парирования постоянных ветровых возмущений.
  4. По рассогласованию  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi^*$  синтезировать закон управления  $U_4$  на основе четвертого уравнения (8).
  5. По рассогласованию  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  рассчитать координаты перемещений в системе координат квадрокоптера  $\tilde{\tilde{x}}$  и  $\tilde{\tilde{y}}$  с использованием уравнения (13). Заметим, что для угла рысканья  $\varphi$  получено заданное значение благодаря более быстрому регулятору  $U_4$ .
  6. По рассогласованию  $\tilde{\tilde{x}}$  и  $\tilde{\tilde{y}}$  синтезировать законы управления  $U_5$  и  $U_6$  соответственно с помощью модели (14).
  7. На основе рассчитанных значений  $U_1, U_5$  и  $U_6$  определить желаемые значения тангажа  $\theta^*$  и крена  $\psi^*$  на основе второго и третьего уравнений (15).
  8. По рассогласованию  $\tilde{\theta}$  и  $\tilde{\psi}$  синтезировать законы управления  $U_2$  и  $U_3$  с использованием второго и третьего уравнений (8).
  9. По рассчитанным значениям  $U_1, U_2, U_3, U_4$  вычислить значения реальных управляющих воздействий  $F_1, F_2, F_3, F_4$  с использованием системы линейных уравнений (5), (6).
- Заключение.** В статье предложен новый алгоритм синтеза системы управления многороторным летательным аппаратом на примере квадрокоптера. Достоинством представленного алгоритма является обеспечение желаемого перемещения с более простой структурой реализации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриевский Б. Р. Теоретические основы автоматизированного управления. Конспект лекций. СПб: БГТУ „Военмех“, 2008.
2. Мирошник И. В., Шалаев А. Н. Управление траекторным движением автономных роботов // Науч.-техн. вестн. СПбГИТМО (ТУ). 2002. Вып. 6.
3. Bouabdallah S. Design and control of quadrotors with application to autonomous flying. PhD thesis. EPFL, 2007.
4. Altug E., Ostrowski J. P., Mahony R. Control of a Quadrotor Helicopter Using Visual Feedback // IEEE. Intern. Conf. on Robotics & Automation. Washington, 2002.

5. *Siiric V.* Control of Quadcopter. Master of Science Thesis. Stockholm, Sweden, 2008.
6. *Бобцов А. А., Николаев Н. А.* Управление по выходу линейными системами с неучтенной паразитной динамикой // *АиТ.* 2009. № 6. С. 115—122.
7. *Бобцов А. А., Фаронов М. В.* Управление по выходу нелинейными системами с запаздыванием в условиях неучтенной динамики // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2011. № 3. С. 79—87.
8. *Bobtsov A. A., Pyrkin A. A., Faronov M. V.* Output control for time-delay nonlinear system providing exponential stability // *Proc. of 19<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control & Automation (MED).* 2011. P. 515—520.

**Сведения об авторах**

- Антон Александрович Пыркин** — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; доцент; E-mail: a.pyrkin@gmail.com
- Татьяна Алексеевна Мальцева** — студентка; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики
- Дмитрий Владимирович Лабадин** — студент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики
- Максим Олегович Суров** — аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики
- Алексей Алексеевич Бобцов** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; заведующий кафедрой; декан факультета компьютерных технологий и управления; E-mail: bobtsov@mail.ifmo.ru

Рекомендована кафедрой  
систем управления и информатики

Поступила в редакцию  
13.12.12 г.