УДК 629.191

В. Н. Арсеньев, Д. А. Булекбаев, С. Б. Силантьев

МЕТОД КОРРЕКЦИИ КООРДИНАТ ТОЧКИ ПРИЦЕЛИВАНИЯ РАКЕТЫ КОСМИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Рассматривается задача выбора точки прицеливания ракеты космического назначения, обеспечивающего падение отделяемой от ракеты части в заданный район земной поверхности. Приведено аналитическое решение, позволяющее найти такую точку прицеливания, при которой предстартовая коррекция полетного задания будет минимальной.

Ключевые слова: *ракета космического назначения, точка прицеливания, отделяемая часть, эллипс рассеивания, район падения.*

Введение. В настоящее время существует противоречие между двумя основными требованиями, предъявляемыми к пускам ракет космического назначения (РКН). Необходимо, с одной стороны, обеспечить требуемую точность решения целевой задачи РКН — выведение космических аппаратов (КА) в заданную область космического пространства, а с другой — гарантировать падение отделяемых частей (ОЧ) РКН в заданные районы земной поверхности. Существующие алгоритмы управления РКН (далее называемые оптимальными) обеспечивают решение этих задач с некоторой вероятностью, поскольку движение РКН на активном участке траектории и пассивное движение ОЧ после их отделения от РКН зависят от множества случайных факторов.

Возмущения, влияющие на РКН при движении на активном участке траектории, приводят к отклонениям параметров движения ракеты от расчетных значений и в результате к разбросу начальных параметров движения ОЧ после ее отделения от РКН. От этих характеристик непосредственно зависят расположение и размеры области рассеивания точек падения ОЧ на земной поверхности.

Возмущающие факторы, воздействующие на ОЧ после отделения от РКН (на пассивном участке траектории движения ОЧ), также приводят к изменению характеристик области рассеивания точек падения ОЧ. На этом участке полета наиболее существенное влияние на рассеивание оказывают разброс параметров ОЧ относительно номинальных величин, отклонения термодинамических параметров атмосферы от расчетных значений, а также ветровые возмущения в районе падения ОЧ. Область падения ОЧ обычно описывается эллипсом рассеивания.

Возрастающие требования по обеспечению безопасности населения и народнохозяйственных объектов, экологической безопасности, а также ограничения политического характера ведут к сокращению числа и уменьшению размеров районов, отводимых для падения отделяемых от РКН частей. В связи с этим для обеспечения гарантированного падения

ОЧ в отведенные районы необходимо непосредственно перед пуском ракеты космического назначения иметь оперативную информацию о состоянии атмосферы в этих районах.

В ряде случаев можно допустить, что возмущения, действующие на ОЧ на пассивном участке траектории движения, не оказывают существенного влияния на размеры эллипса рассеивания, а приводят к перемещению его центра относительно центра отведенного района падения. В результате вероятность падения ОЧ за пределами отводимого района может превысить допустимое значение. Обеспечить падение ОЧ в заданный район с требуемой вероятностью можно только путем изменения координат точки прицеливания РКН, определяющих начальные значения параметров движения ОЧ. Число таких точек может быть сколь угодно большим. Представляется очевидным, что точку прицеливания следует выбирать таким образом, чтобы отклонение траектории движения РКН от оптимальной было минимальным. При таком подходе потребуется минимальная предстартовая коррекция параметров алгоритма управления РКН, что не приведет к существенному ухудшению качества решения целевой задачи РКН [1]. С другой стороны, благодаря определению начальных условий движения ОЧ будет обеспечено ее падение в заданный район.

Постановка задачи. В общем виде модель возмущенного движения ОЧ на пассивном участке траектории может быть описана векторным нелинейным дифференциальным уравнением [2, 3]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t), \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{н}0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\text{н}(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$ — n-мерный случайный вектор параметров движения ОЧ; $\mathbf{x}_\text{н}(t)$ — номинальное значение вектора параметров движения ОЧ; $\Delta\mathbf{x}(t)$ — вектор случайных отклонений параметров движения ОЧ от номинальной траектории; $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ — начальное значение вектора параметров движения ОЧ в момент ее отделения от РКН; $\mathbf{x}_{\text{н}0} = \mathbf{x}_\text{н}(t_0)$ — номинальное (расчетное) значение вектора параметров движения ОЧ в момент ее отделения от РКН; $\boldsymbol{\lambda}$ — вектор случайных возмущений, действующих на движение ОЧ после ее отделения от РКН; t — время движения ОЧ от момента t_0 отделения от РКН до момента достижения земной поверхности (при высоте над поверхностью Земли h=0).

На земной поверхности координаты точки падения ОЧ в продольном (l) и боковом (b) направлениях относительно центра отведенного района падения характеризуются вектором $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & b \end{bmatrix}^T$, который полностью определяется вектором параметров движения центра масс ОЧ в момент достижения ею поверхности Земли: $\mathbf{x}\big|_{h=0} = \mathbf{x}_\text{н}\big|_{h=0} + \Delta\mathbf{x}_{h=0}$. При расчетных значениях вероятностных характеристик возмущающих воздействий центр области рассеивания точек падения ОЧ, положение которого характеризуется вектором $\mathbf{R}_\text{н} = \begin{bmatrix} l_\text{н} & b_\text{н} \end{bmatrix}^T$, совпадает с центром района падения. В этом случае $\mathbf{R}_\text{н} = 0$, а эллипс, ограничивающий область рассеивания, находится полностью внутри района падения.

При отклонениях характеристик возмущений от расчетных центр области рассеивания может не совпадать с центром отведенного района падения, т.е. $\mathbf{R}_\text{н} \neq 0$. В результате этого эллипс рассеивания может частично или полностью выходить за пределы района падения. Путем перемещения центра эллипса в продольном или (и) боковом направлении можно найти такое его новое положение $\mathbf{R}_\text{т} = \begin{bmatrix} l_\text{т} & b_\text{т} \end{bmatrix}^T$, при котором эллипс рассеивания будет касаться границы района падения, находясь внутри него.

В этом случае задача сводится к определению вектора начальных параметров движения ОЧ $\mathbf{x}_{\text{т}0} = \mathbf{x}_\text{т}(t_0)$, минимально отличающегося от вектора $\mathbf{x}_{\text{н}0} = \mathbf{x}_\text{н}(t_0)$ и определяющего условия падения ОЧ в область, ограниченную эллипсом рассеивания с центром в точке ($l_\text{т}$, $b_\text{т}$).

Определение координат точки прицеливания РКН. В первом приближении функциональную зависимость между разностью $\mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}}$ и вектором $\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}$ отклонений параметров движения РКН от номинальных значений в момент отделения ОЧ можно положить линейной, т.е.

$$\mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right). \tag{2}$$

Для определения матрицы **A** используются известные подходы [4, 5].

В качестве вектора $\mathbf{x}_{\text{т}0}$, элементами которого являются координаты точки прицеливания РКН, определяющие падение ОЧ в заданный район, принимается

$$\mathbf{x}_{\text{т}0} = \arg\min_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right)^T \mathbf{W}\left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{W}$ — невырожденная $n\times n$-матрица весовых коэффициентов.

Для решения задачи (2), (3) используется метод неопределенных множителей Лагранжа, в соответствии с которым минимизируемая функция имеет вид

$$L = \left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right)^T \mathbf{W}\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right) + 2\boldsymbol{\mu}^T\left[\mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}} - \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right)\right],$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — вектор-столбец неопределенных множителей Лагранжа размерностью 2×1.

Частные производные от функции L определяются по векторам $\mathbf{x}_{\text{т}0}$ и $\boldsymbol{\mu}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_{\text{т}0}} = 2\mathbf{W}\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right) - 2\mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 2\left[\mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}} - \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right)\right],$$

приравнивание которых к нулю дает два уравнения:

$$\mathbf{W}\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right) - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} = 0,$$

$$\mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}} - \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right) = 0.$$

Подстановка во второе уравнение величины

$$\mathbf{x}_{\text{т}0} = \mathbf{x}_{\text{н}0} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu}, \tag{4}$$

полученной из первого уравнения, позволяет найти вектор неопределенных множителей Лагранжа

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\mathbf{A}\,\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\left(\mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}}\right).$$

Подстановка вектора $\boldsymbol{\mu}$ в уравнение (4) дает решение поставленной задачи:

$$\mathbf{x}_{\text{т}0} = \mathbf{x}_{\text{н}0} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T\left(\mathbf{A}\,\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\left(\mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}}\right). \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что полученное решение обеспечивает выполнение условия (2). Действительно,

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right) = \mathbf{A}\,\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T\left(\mathbf{A}\,\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\left(\mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}}\right) = \mathbf{R}_{\text{т}} - \mathbf{R}_{\text{н}}.$$

Пример. Рассмотрим движение отделяемой части (блока А) РКН „Союз-2" на пассивном участке траектории (после отделения от ракеты). Начальные параметры движения ОЧ в гринвичской инерциальной системе координат задаются вектором

$$\mathbf{x}_{\text{н}0} = \begin{bmatrix} x_{\text{н}0} & y_{\text{н}0} & z_{\text{н}0} & V_{x_{\text{н}0}} & V_{y_{\text{н}0}} & V_{z_{\text{н}0}} \end{bmatrix}^T,$$

где $x_{\text{н}0} = 460\,133$ м; $y_{\text{н}0} = 149\,932$ м; $z_{\text{н}0} = -\,43\,031$ м; $V_{x_{\text{н}0}} = 3598{,}88$ м/с; $V_{y_{\text{н}0}} = 525{,}27$ м/с; $V_{z_{\text{н}0}} = -\,345{,}30$ м/с.

При использовании модели стандартной атмосферы в процессе моделирования пассивного движения ОЧ центр эллипса рассеивания точек падения совпадает с центром района падения, т.е. $\mathbf{R}_{\text{н}} = 0$. Вследствие ветровых возмущений в районе падения ОЧ координаты центра эллипса рассеивания отклоняются от центра района падения в продольном направлении на $l_{\text{н}} = -30\,000$ м и в боковом направлении на $b_{\text{н}} = 5000$ м, т.е. $\mathbf{R}_{\text{н}} = \begin{bmatrix} -30\,000 & 5000 \end{bmatrix}^T$ [6].

Необходимо найти новые значения координат центра масс РКН в момент отделения блока А (новые начальные параметры движения блока А), при которых будет обеспечено его падение в центр отведенного района, т.е. $\mathbf{R}_{\text{т}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. При этом требуется, чтобы составляющие вектора скорости ОЧ в момент ее отделения от РКН совпадали с номинальными, т.е.

$$V_{x_{\text{т}0}} = V_{x_{\text{н}0}} = 3598{,}88 \text{ м/с}; \; V_{y_{\text{т}0}} = V_{y_{\text{н}0}} = 525{,}27 \text{ м/с}; \; V_{z_{\text{т}0}} = V_{z_{\text{н}0}} = -\,345{,}30 \text{ м/с}. \tag{6}$$

Матрица $\mathbf{A}$ линейной модели (2), полученная в соответствии с изложенным в работе [5] подходом, имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1{,}44 & 2{,}71 & 4{,}66 & 67{,}66 & 48{,}36 & 342{,}48 \\ -0{,}93 & 0{,}37 & 0{,}19 & -175{,}96 & 60{,}15 & 27{,}47 \end{bmatrix}.$$

Обеспечить выполнение условий (6) можно различными способами. В частности, можно принять $\mathbf{W} = \operatorname{diag}\left\{1,\ 1,\ 1,\ 10^9,\ 10^9,\ 10^9\right\}$. Тогда в соответствии с выражением (5) отделение блока А от РКН должно быть произведено в точке

$$\mathbf{x}_{\text{т}0} = \begin{bmatrix} 466\,658 & 150\,811 & -39\,121 & 3598{,}88 & 525{,}27 & -345{,}30 \end{bmatrix}^T.$$

При изменении направления ветра положение центра эллипса рассеивания точек падения ОЧ и, как следствие, координаты точки прицеливания РКН также изменяются. Например, если направление ветра вдоль трассы полета РКН изменилось на противоположное и $\mathbf{R}_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 30\,000 & 5000 \end{bmatrix}^T$, то параметры движения РКН в момент отделения блока А задаются вектором

$$\mathbf{x}_{\text{т}0} = \begin{bmatrix} 462\,900 & 145\,920 & -47\,990 & 3598{,}88 & 525{,}27 & -345{,}30 \end{bmatrix}^T.$$

Ужесточение требований к отклонению траектории движения РКН от расчетной также приводит к изменению координат точки прицеливания. Например, если дополнительно к условиям (6) требуется, чтобы в момент отделения блока А координата $z_{\text{т}0} = z_{\text{н}0} = -\,43\,031$ м, то весовую матрицу следует вычислять как $\mathbf{W} = \operatorname{diag}\left\{1,\ 1,\ 10^9,\ 10^9,\ 10^9,\ 10^9\right\}$. Тогда при $\mathbf{R}_{\text{н}} = \begin{bmatrix} -30\,000 & 5000 \end{bmatrix}^T$ координаты точки прицеливания в ГСК определяется вектором

$$\mathbf{x}_{\text{т}0} = \begin{bmatrix} 468\,207 & 156\,712 & -43\,031 & 3598{,}88 & 525{,}27 & -345{,}30 \end{bmatrix}^T,$$

а при $\mathbf{R}_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 30\,000 & 5000 \end{bmatrix}^T$ — вектором

$$\mathbf{x}_{\text{т}0} = \begin{bmatrix} 460\,935 & 138\,436 & -43\,031 & 3598{,}88 & 525{,}27 & -345{,}30 \end{bmatrix}^T.$$

Статистическое моделирование возмущенного движения ОЧ после отделения ее от ракеты в точке $\mathbf{x}_{\text{т}0}$ показало, что погрешности определения координат центра эллипса рассеивания, связанные с использованием приближенной модели (2), не превышают 4 %.

Заключение. Решение (5) задачи (2), (3) демонстрирует зависимость вектора $\mathbf{x}_{\text{т}0}$ от матрицы весовых коэффициентов $\mathbf{W}$. При изменении ее элементов может изменяться значение квадратичной формы $\left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right)^T \mathbf{W} \left(\mathbf{x}_{\text{т}0} - \mathbf{x}_{\text{н}0}\right)$. Однако выбор этой матрицы никак не влияет на положение центра эллипса рассеивания точек падения ОЧ, поскольку при любой невырожденной матрице $\mathbf{W}$ подстановка вектора $\mathbf{x}_{т0}$ в уравнение (2) обращает последнее в тождество.

В качестве весовой матрицы целесообразно использовать диагональную матрицу $\mathbf{W} = \mathrm{diag}\{W_1, W_2, ..., W_n\}$. Поскольку, в общем случае, вектор $\mathbf{x}_{т0}$ является шестимерным, то, варьируя диагональные элементы матрицы $\mathbf{W}$, можно найти такую точку прицеливания РКН, при которой коррекция алгоритма управления будет минимальной. При этом, как было отмечено выше, гарантируется падение ОЧ в заданный район земной поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкиев Н. Ф., Булекбаев Д. А.* Метод синтеза программы движения ракеты космического назначения для минимизации затрат на выведение полезного груза // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56, № 10. С. 11—15.

2. Теория полета ракет-носителей: Учебник для вузов / *Г. И. Кудин, В. П. Насонов, С. К. Слезкинский, С. И. Ряполов, К. В. Хрусталев.* МО РФ, 1994. 735 с.

3. *Лебедев А. А., Герасюта Н. Ф.* Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970. 244 с.

4. *Юсупов Р. М., Розенвассер Е. Н.* Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.

5. *Арсеньев В. Н., Кохановский А. Г., Фадеев А. С.* Математическая модель связи изохронных вариаций переменных состояния системы управления с возмущениями параметров ее составных частей // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56, № 3. С. 25—29.

6. *Арсеньев В. Н., Булекбаев Д. А.* Метод уточнения модельных значений параметров атмосферы для прогнозирования районов падения отделяемых частей ракет-носителей // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 1. С. 5—10.

Сведения об авторах

Владимир Николаевич Арсеньев — д-р техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра бортовых информационных и измерительных комплексов, Санкт-Петербург; E-mail: vladar56@mail.ru

Дастанбек Абдыкалыкович Булекбаев — канд. техн. наук, доцент; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра высшей математики, Санкт-Петербург; E-mail: atiman@mail.ru

Сергей Борисович Силантьев — канд. техн. наук, доцент; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра автономных систем управления, Санкт-Петербург

Рекомендована кафедрой
автоматики и электроники

Поступила в редакцию
30.12.13 г.