ISSN 2500—0381
Электронная версия

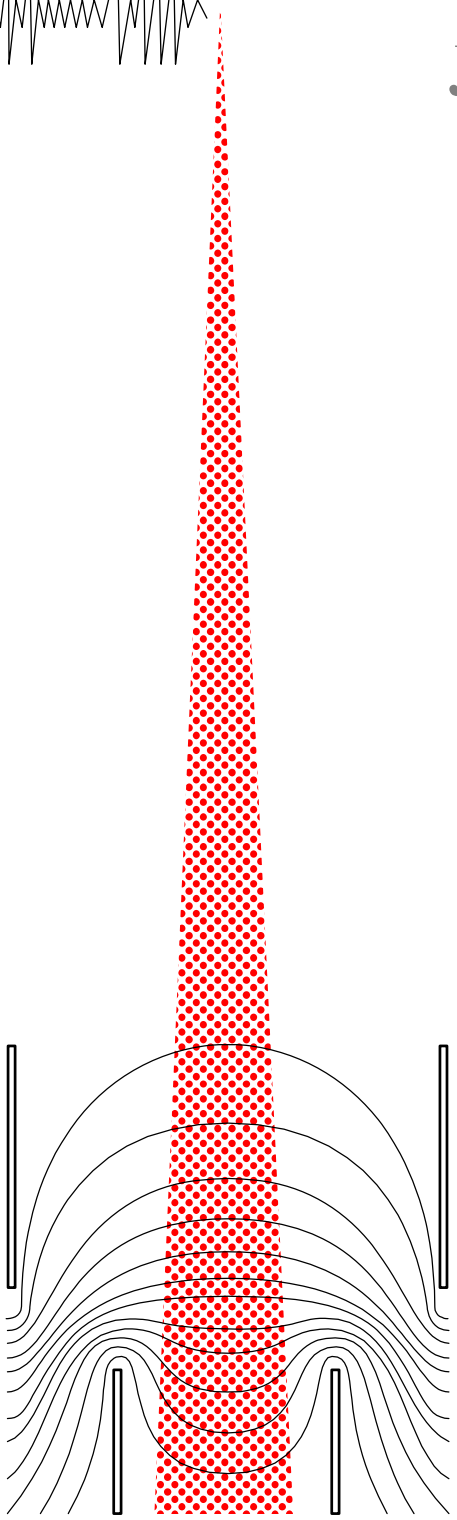
ISSN 0021—3454
Печатная версия

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

№ 3
Т. 67
2024



Journal of Instrument Engineering

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

д-р техн. наук, проф. А. А. БОБЦОВ,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. П. АЛЕШКИН, д-р техн. наук, проф., ВКА им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
А. В. БЕЛИКОВ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
И. А. БЕССМЕРТНЫЙ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. А. БОГАТЫРЕВ, д-р техн наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Д. В. ЕФАНОВ, д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия
В. В. ЕФИМОВ, д-р техн. наук, проф., ВКА им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
А. КЛИМЧИК, PhD, доцент, Университет Иннополис, Иннополис, Россия
С. А. КОЛЮБИН, д-р техн. наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
И. А. КОНЯХИН, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. В. КРИШТОП, д-р физ.-мат. наук, проф., ПНИПУ, Пермь, Россия
Л. С. ЛИСИЦЫНА, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Ю. А. ЛИТВИНЕНКО, канд. техн. наук, Концерн «ЦНИИ «„Электроприбор“», Санкт-Петербург, Россия
В. Д. ЛУКЬЯНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., ОАО „Авангард“, Санкт-Петербург, Россия
А. В. ЛЯМИН, д-р техн. наук, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия
А. В. МАЛОЛЕТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., Университет Иннополис, Иннополис, Россия
Ю. Н. МАТВЕЕВ, д-р техн. наук, ООО „ЦРТ-инновации“, Санкт-Петербург, Россия
В. М. МЕДУНЕЦКИЙ, д-р техн. наук, проф., ООО „Феррум“, Санкт-Петербург, Россия
А. Н. МИРОНОВ, д-р техн. наук, проф., ВКА им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
В. М. МУСАЛИМОВ, д-р техн. наук, проф., ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия
А. А. ОЖИГАНОВ, д-р техн. наук, проф., АО «НИТИ „Авангард“», Санкт-Петербург, Россия
А. А. ПЫРКИН (зам. главного редактора), д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. С. СИЗИКОВ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Б. В. СОКОЛОВ, д-р техн. наук, проф., СПбФИЦ РАН, Санкт-Петербург, Россия
С. В. СОЛК, д-р техн. наук, НИИ ОЭП, Сосновый Бор, Ленинградская обл., Россия
В. Ю. ТЕРТЫЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Д. В. ТИТОВ, д-р техн. наук, доцент, ЮЗГУ, Курск, Россия
А. В. ФЕДОРОВ, д-р техн наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Н. Б. ФИЛИМОНОВ (зам. главного редактора), д-р техн. наук, проф., МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
И. Б. ФУРТАТ, д-р техн наук, доцент, ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия
В. П. ХОДУНКОВ, канд. техн. наук, ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, Санкт-Петербург, Россия

Ответственный секретарь *М. В. Лебецкая*

Редактор *И. М. Игошина*

Набор, верстка: *М. В. Герасимова*

Перевод: *Ю. И. Копилевич*

Адрес: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А, Университет ИТМО

Телефон: (812) 480-02-73, E-mail: pribor@itmo.ru
http: // pribor.ifmo.ru/

Подписано в печать 29.03.2024 г.

Отпечатано в учреждении „Университетские телекоммуникации“
Адрес: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А
Телефон: (812) 915-14-54, E-mail: Prudentov@tibir.ru

© „Известия вузов. Приборостроение“, 2024

Редколлегия просит авторов и рецензентов отнестись с пониманием к ужесточению требований к рукописям и изменению формы подачи материала в журнале.

Аннотация объемом 150—250 слов должна отражать содержание статьи: предмет исследования, цель работы, метод проведения работы, краткое описание экспериментальных или теоретических исследований, полученные результаты и рекомендации по их применению.

Ключевые слова, служащие идентификаторами при предметном поиске, должны однозначно отражать содержание статьи. Основное ключевое слово/словосочетание указывается первым, общее количество ключевых слов — не менее 5.

Список литературы: для обзорной статьи рекомендуется приводить не менее 50 источников, для полнотекстовой статьи — не менее 15, для краткого сообщения — не менее 8.

Требования к оформлению рукописи размещены на сайте журнала http://pribor.itmo.ru/

Индекс 70374

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ. ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

Адрес: 197101, Санкт-Петербург,
Кронверкский пр., 49, лит. А, Университет ИТМО
Телефон: (812) 480-02-73
http:// pribor.ifmo.ru/
E-mail: pribor@itmo.ru

Журнал публикует научные обзоры, полнотекстовые статьи и краткие сообщения, отражающие результаты практических и теоретических исследований в области приборостроения.

Журнал содержит следующие разделы:

— информатика и информационные процессы;
— информационно-измерительные и управляющие системы;
— системный анализ, управление и обработка информации;
— приборы навигации;
— вычислительные системы и их элементы;
— оптические и оптико-электронные приборы и комплексы;
— методы и приборы для анализа и контроля материалов, изделий, веществ и природной среды;
— приборы, системы и изделия медицинского назначения;
— проектирование и технология производства приборов;
— метрология и метрологическое обеспечение;
— компьютерное моделирование и автоматизация проектирования;
— роботы, мехатроника и робототехнические системы.

По договоренности с Редакцией может быть опубликован специальный тематический выпуск, посвященный достаточно узкой проблеме приборостроения.

Рукопись подается по электронной почте: pribor@itmo.ru. Редакция принимает рукопись к рецензированию при условии получения полного комплекта документов, включающего:

— экспертное заключение о возможности опубликования в открытой печати (формат PDF);
— файлы рукописи статьи, оформленные в соответствии с требованиями журнала;
— сведения об авторах, заполненные по шаблону (на русском и английском языке);
— договор о передаче авторских прав.

Рукопись должна содержать:

— название статьи (на русском и английском языке), индекс УДК;
— аннотацию (150—250 слов, на русском и английском языке), ключевые слова (не менее 5 и не более 25, на русском и английском языке), основной текст, список литературы;
— рисунки: каждый на отдельном листе формата А4 (не заверстывать в текст), таблицы.

Объем текста (оформленного в соответствии с требованиями журнала — шрифт Times New Roman, размер — 14 пт, междустрочный интервал 1,5, поля — сверху и слева 25 мм, снизу 20 мм, справа 10 мм) должен составлять 10—20 страниц, краткого сообщения — 3—5. Объем обзора предварительно согласовывается с Редакцией.

Список литературы (рекомендуется): для обзорной статьи — не менее 50, для полнотекстовой статьи — не менее 15, для краткого сообщения — не менее 8 литературных источников (не менее половины из них должны представлять собой ссылки на издания, включенные в международные базы цитирования Scopus и Web of Science). Список литературы должен формироваться в порядке появления ссылок в тексте.

Не допускается выравнивание с помощью пробелов, табуляций и символов конца абзаца. Эти символы при необходимости могут вставляться не более одного раза подряд (**не переносить с помощью дефисов**).

Формулы и отдельные символы набираются с использованием только редактора формул MathType. **Не вставлять** формулы из пакетов MathCad и MatLab. Размер шрифта в формулах — по умолчанию. Все переменные набираются курсивом, греческие буквы — прямым шрифтом, полужирные символы в формуле — стилем „матрица вектор“, русские символы — стилем „текст“, векторы следует набирать полужирным шрифтом без стрелок.

Рисунки выполняются в градациях серого в одном из форматов приложений Microsoft (Word, Excel, PowerPoint), предпочтителен векторный формат. Кривые на графиках следует помечать цифрами (1, 2, 3 и т.д.) или/и задавать линиями разного стиля (пунктир, штрихпунктир, жирная); толщина осей должна быть не менее 0,5 пт, иначе качество печати не гарантируется.

Плата за публикацию не взимается.

ISSN 0021–3454. Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 205—299.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПРИБОРОСТРОЕНИЕ
ИЗДАНИЕ УНИВЕРСИТЕТА ИТМО
Журнал издается с января 1958 г.

ТОМ 67 **МАРТ 2024** **№ 3**

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Буй В. Х., Маргун А. А., Бобцов А. А. Синтез наблюдателя переменных состояния и синусоидального возмущения для линейной нестационарной системы с неизвестными параметрами 209

Жусубалиев Ж. Т., Абдирасулов А. З., Сопуев У. А., Коломиец Е. А. Мультистабильная динамика системы управления с однополярной широтно-импульсной модуляцией 220

Шишлаков В. Ф., Гончарова В. И. Параметрический синтез линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами 230

Глущенко А. И., Ласточкин К. А. Идентификация параметров модели глубины погружения подводного аппарата на базе процедуры динамического расширения и смешивания регрессора 241

Микони С. В., Захаров В. В. Перспективы решения задач организационного управления в инструментальной системе выбора и ранжирования „СВИРЬ“ 251

ОПТИЧЕСКИЕ И ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРИБОРЫ И КОМПЛЕКСЫ

Кирилловский В. К., Точилина Т. В. Дифракционные интерферометры. Аналитический обзор 257

Майоров Е. Е., Курлов В. В., Бородянский Ю. М., Дагаев А. В., Таюрская И. С. Экспериментальное определение величины перемещения объекта в плоскости установки методом голографической интерферометрии 268

ПРИБОРЫ, СИСТЕМЫ И ИЗДЕЛИЯ МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Рыкунов В. В., Шилин Д. В., Шестов Д. А. Интеллектуальный программно-аппаратный комплекс контроля давления в манжетах эндотрахеальных и трахеостомических трубок 276

МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ АНАЛИЗА И КОНТРОЛЯ МАТЕРИАЛОВ, ИЗДЕЛИЙ, ВЕЩЕСТВ И ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ

Волков Д. П., Заричняк Ю. П., Мешковский И. К., Симонова М. А. Проницаемость нанопористых стекол 286

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Кузнецов М. Д., Марусина М. Я. Финитное управление квадрокоптером с гарантией нахождения выходного сигнала в заданном множестве 294

EDITOR-IN-CHIEF

Dr. Sci., Prof. ALEXEY BOBTSOV,
ITMO University, St. Petersburg, Russia

EDITORIAL BOARD

ALESHKIN ANDREY, Dr. Sci., Prof., A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
BELIKOV ANDREY, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
BESSMERTNY IGOR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
BOGATYREV VLADIMIR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
EFANOV DMITRY, Dr. Sci., Prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia
EFIMOV VLADIMIR, Dr. Sci., Prof., A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
KHODUNKOV VYACHESLAV, PhD, D. I. Mendeleev All-Russian Institute for Metrology, St. Petersburg, Russia
KLIMCHIK ALEXANDER, PhD, Ass. Prof., Innopolis University, Innopolis, Russia
KOLYUBIN SERGEY, Dr. Sci., Ass. Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
KONYAKHIN IGOR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
KRISHTOP VIKTOR, Dr. Sci., Prof., PNRPU, Perm, Russia
LISITSYNA LYUBOV, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
LITVINENKO YULIA, PhD, Concern CSRI Electropribor, JSC, St. Petersburg, Russia
LUKYANOV VALERY, Dr. Sci., Prof., Avangard JSC, St. Petersburg, Russia
LYAMIN ANDREY, Dr. Sci., Ass. Prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia
MALOLETOV ALEXANDER, Dr. Sci., Prof., Innopolis University, Innopolis, Russia
MATVEEV YURIY, Dr. Sci., Speech Technology Center, St. Petersburg, Russia
MEDUNETSKY VIKTOR., Dr. Sci., Prof., Ferrum LLC, St. Petersburg, Russia
MIRONOV ANDREY, Dr. Sci., Prof., A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
MUSALIMOV VIKTOR, Dr. Sci., Prof., IPMash RAS, St. Petersburg, Russia
OZHIGANOV ALEXANDER, Dr. Sci., Prof., SRTI Avangard JSC, St. Petersburg, Russia
PYRKIN ANTON, Dr. Sci., Prof., Deputy Editor-in-Chief, ITMO University, St. Petersburg, Russia
SIZIKOV VALERY, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
SOKOLOV BORIS, Dr. Sci., Prof., SPbFRC RAS, St. Petersburg, Russia
SOLK SERGEY, Dr. Sci., SRI OEP, Sosnovy Bor, Leningrad region, Russia
TERTYCHNY VLADIMIR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
TITOV DMITRY, Dr. Sci., Ass. Prof., SWSU, Kursk, Russia
FEDOROV ALEXEY, Dr. Sci., Ass. Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
FILIMONOV NIKOLAY, Dr. Sci., Prof., Deputy Editor-in-Chief, M. V. Lomonosov MSU, Moscow, Russia
FURTAT IGOR, Dr. Sci., Ass. Prof., IPMash RAS, St. Petersburg, Russia

Executive secretary *Marina V. Lebetskaya*

Editor *Irina M. Igoshina*

Page-proof, makeup *Maria V. Gerasimova*

Translation of *Yuriy I. Kopilevich*

Address: ITMO University, Kronverksky pr. 49, bldg. A, St. Petersburg, Russia, 197101
Tel: (812) 480-02-73
Site: pribor.ifmo.ru
E-mail: pribor@itmo.ru

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

JOURNAL OF INSTRUMENT ENGINEERING

ITMO UNIVERSITY

The Journal is published since January 1958

Vol. 67 **MARCH 2024** **№ 3**

CONTENTS

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL, AND INFORMATION PROCESSING

Bui V. H., Margun A. A., Bobtsov A. A. Synthesis of an Observer of State Variables and Sinusoidal Disturbance for a Linear Nonstationary System with Unknown Parameters 209

Zhusubaliyev Zh. T., Abdirasulov A. Z., Sopuev U. A., Kolomiets E. A. Multistable Dynamics of a Control System with Unipolar Pulse-Width Modulation 220

Shishlakov V. F., Goncharova V. I. Parametric Synthesis of Linear Automatic Control Systems with Distributed Parameters 230

Glushchenko A. I., Lastochkin K. A. Parameters Identification for Underwater Vehicle Diving Depth Model Based on the Regressor Dynamic Expansion and Mixing Procedure 241

Mikoni S. V., Zakharov V. V. Prospects for Solving Problems of Organizational Management in the Iinstrumental Selection and Ranking System „SVIR“.....251

OPTICAL AND OPTO-ELECTRONIC INSTRUMENTS AND SYSTEMS

Kirillovsky V. K., Tochilina T. V. Diffraction Interferometers. Analytical Review 257

Maiorov E. E., Kurlov V. V., Borodyansky Yu. M., Dagaev A. V., Tayurskaya I. S. Experimental Determination of an Object Displacement Magnitude in the Installation Plane Using the Holographic Interferometry Method 268

MEDICAL DEVICES, SYSTEMS, AND PRODUCTS

Rykunov V. V., Shilin D. V., Shestov D. A. Intelligent Software and Hardware System for Monitoring the Pressure in the Cuffs of Endotracheal and Tracheostomy Tubes 276

METHODS AND INSTRUMENTS FOR ANALYSIS AND MONITORING OF THE NATURAL ENVIRONMENT, SUBSTANCES, MATERIALS AND PRODUCTS

Volkov D. P., Zarichnyak Yu. P., Meshkovsky I. K., Simonova M. A. Permeability of Nanoporous Glasses 286

BRIEF NOTES

Kuznetsov M. D., Marusina M. Ya. Finite Control of a Quadcopter with a Guarantee for the Output Signal to Be in a Given Set 294

To the Authors!

The Journal of Instrument Engineering publishes scientific reviews, full-text articles and short messages, reflecting the unpublished results of theoretical and practical research in the field of fundamental instrument making.

The Journal publishes articles on the following themes: information technologies and systems, devices and automatic control systems, computer engineering, gyroscopic and navigation systems, instruments of precision mechanics, electronic and electromagnetic devices, optical and optoelectronic devices and systems, thermal regimes and reliability of devices and systems, technology and instrumentation, scientific and practical development. In agreement with the Editorial Board can be published a special themed issue devoted to a fairly narrow issue of instrumentation.

The material of the article accepted in electronic form and on any media, executed in a text editor Word without formatting along with a hard copy on A4. Electronic version of the paper may be sent by E-mail: **pribor@mail.ifmo.ru**

The size of the article (in printed form) must not exceed eight pages, a short presentation of two. Size scientific review previously agreed with the Editorial Board.

Submission includes two copies of:

— the manuscript text; list of references (recommended): review article — not less than 50, for the full text of the article — no less than 15, for short messages — at least 8 of the literary source (at least half of them should be links to the editions listed in international database of citation Scopus and Web of Science); number citations consecutively as they appear in the text;

— extended abstract (150—250 words);

— keywords (not less than 5 and not more than 25);

— illustrations: each on a separate sheet of A4 (not overstimate in the text) — big, with a maximum fill;

— the recommendation of the Department (laboratory);

— information about the authors on a template (surname, name, patronymic, name of the organization in accordance with the latest edition of the Charter, the address of the organization, academic degree and title, position, e-mail address).

The article must also enclose agreement on the transfer of copyright.

The main text. The following requirements are common to good practice in the design documents.

Font — Times New Roman, size 14, line spacing 1.5, margins — top and left — 25 mm, bottom — 20 mm, right — 10 mm.

Not allowed alignment with spaces, tabs and end of a paragraph (in the layout will need to be cleared). These symbols must be inserted only when necessary, and not more than once in a row (not to carry with dashes).

Don’t insert formulas from MathCad or MatLab!

Figures and tables are to be inserted after the list of references. Graphics are accepted in one of Microsoft formats (Word, Excel, and PowerPoint); vector format is preferable. Don’t use color graphics; it is better to apply dotted, dash-and dot lines, etc., or mark lines with numerical symbols.

Editorial Staff

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL, AND INFORMATION PROCESSING

УДК 519.71
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-209-219

СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ И СИНУСОИДАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Х. Буй[1], А. А. Маргун[1,2*], А. А. Бобцов[1]

[1] *Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия*
[*] *alexeimargun@gmail.com*

[2] *Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. Рассматривается задача синтеза наблюдателя вектора переменных состояния для класса линейных нестационарных систем с произвольной относительной степенью r в условиях внешних мультигармонических возмущений. Входной сигнал предполагается неизвестным. На первом этапе решения задачи синтезируется наблюдатель вектора переменных состояния по измерениям выходной переменной. Для его реализации требуется измерение r-й производной выходного сигнала. Для преодоления данного ограничения вводится вспомогательный наблюдатель, обеспечивающий оценку начальной ошибки наблюдения с использованием метода динамического расширения регрессора с конечным временем сходимости. На основе полученной оценки выполняется восстановление сигналов, требуемых для построения наблюдателя по выходу в виде авторегрессионной модели. Предложенный алгоритм обеспечивает оценку вектора состояния объекта по выходу за конечное время. Приведено строгое математическое доказательство полученных результатов. Представлены результаты компьютерного моделирования в программной среде MatLab Simulink, демонстрирующие эффективность и работоспособность предложенного подхода. Разработанный алгоритм может быть применен в различных технических системах для создания виртуальных датчиков и решения задач диагностирования.

Ключевые слова: *наблюдатель по выходу, внешнее возмущение, нестационарные системы, конечное время сходимости*

Благодарности: исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание № 2019-0898.

Ссылка для цитирования: *Буй В. Х., Маргун А. А., Бобцов А. А.* Синтез наблюдателя переменных состояния и синусоидального возмущения для линейной нестационарной системы с неизвестными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 209—219. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-209-219.

SYNTHESIS OF AN OBSERVER OF STATE VARIABLES AND SINUSOIDAL DISTURBANCE FOR A LINEAR NONSTATIONARY SYSTEM WITH UNKNOWN PARAMETERS

V. H. Bui[1], A. A. Margun[1,2*], A. A. Bobtsov[1]

[1] *ITMO University, St. Petersburg, Russia*
** alexeimargun@gmail.com*

[2] *Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, St. Petersburg, Russia*

© Буй В. Х., Маргун А. А., Бобцов А. А., 2024

Abstract. The problem of synthesizing an observer of a vector of state variables for a class of linear nonstationary systems with an arbitrary relative degree *r* under conditions of external multi-harmonic disturbances is considered. The input signal is assumed to be unknown. At the first stage of solving the problem, an observer of the vector of state variables is synthesized from the measurements of the output variable. To implement it, it is necessary to measure the *r*-th derivative of the output signal. To overcome this limitation, an auxiliary observer is introduced, which provides an estimate of the initial observation error using the method of dynamic expansion of the regressor with a finite convergence time. Based on the obtained estimate, the reconstruction of the signals required to construct an output observer in the form of an autoregressive model is carried out. The proposed algorithm provides an estimate of the state vector of an object based on output in a finite time. A rigorous mathematical proof of the obtained solution is given. The results of computer simulation in the MatLab Simulink software environment are presented, demonstrating the effectiveness and efficiency of the proposed approach. The developed algorithm can be used in various technical systems to create virtual sensors and solve diagnostic problems.

Keywords: output observer, external disturbance, non-stationary systems, finite convergence time

Acknowledgements: the research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, state assignment No. 2019-0898.

For citation: Bui V. H., Margun A. A., Bobtsov A. A. Synthesis of an observer of state variables and sinusoidal disturbance for a linear nonstationary system with unknown parameters. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 209—219 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-209-219.

Введение. Построение наблюдателей вектора переменных состояния — одна из фундаментальных задач в теории управления. Данной тематике посвящено большое количество исследований, что обусловлено технологическими ограничениями при измерении переменных физических величин на практике (см., например [1—3]). Кроме того, значительное количество реальных систем имеют нестационарные параметры, что не позволяет использовать известные классические подходы [4].

Наряду с этим наличие внешних факторов, таких как возмущения в канале управления и шумы измерений, приводит к отклонению измеряемых сигналов от реальных значений, что, в свою очередь, приводит к возникновению ошибок оценивания переменных вектора состояния. Синтез наблюдателей для нестационарных систем при неизвестных возмущениях в канале управления — достаточно сложная задача, одним из распространенных подходов к решению которой является сведение исходной модели объекта к линейной регрессии [5, 6]. При таком решении матрица системы предполагается заданной в канонической форме [7] или может быть переписана как сумма некоторой известной и неизвестной постоянной матриц [8]. Преимущество такого подхода заключается в возможности идентификации неизвестных параметров системы или внешних возмущений независимо от алгоритма управления. Это позволяет комбинировать различные алгоритмы идентификации, управления и компенсации возмущений. Недостатком данного метода, препятствующего его применению, является необходимость незатухающего возбуждения регрессора. Другой подход основан на использовании наблюдателя по выходу (Unknown Input Observer — UIO) [9—11]. При этом внешние возмущения и нестационарные компоненты рассматриваются как неизвестный входной сигнал, воздействующий на систему. Однако, как правило, построение таких наблюдателей возможно только для линейных систем, относительная степень которых равна единице [12, 13].

Построение наблюдателей состояния по выходу для объектов с большей относительной степенью требует введения существенных ограничений, например измерения производных выходного сигнала системы [14—16].

В настоящей статье предложен новый подход, объединяющий идеи двух вышеупомянутых методов, что позволяет синтезировать наблюдатель вектора состояния по выходу для класса нестационарных систем с произвольной относительной степенью.

Постановка задачи. Рассмотрим класс линейных одноканальных, подверженных влиянию возмущающих воздействий объектов управления вида

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\left[u(t) + f(t)\right];\\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизмеримый вектор состояния; $u(t) = \boldsymbol{\theta}^T(t)\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}$ — неизвестный входной сигнал, зависящий от вектора состояния; $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор нестационарных параметров; $y(t) \in \mathbb{R}$ — измеряемый выходной сигнал объекта управления; $f(t) \in \mathbb{R}$ — неизмеримое мультигармоническое возмущение; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — известные постоянные матрицы соответствующих размерностей; объект управления имеет относительную степень, равную $r \le n$, что означает $\mathbf{CB} = \mathbf{CA}^{r-2}\mathbf{B} = 0$.

Введем следующие допущения.

Д о п у щ е н и е *1.* Количество гармоник в сигнале возмущения известно.

Д о п у щ е н и е *2.* Пары известных постоянных матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ соответственно управляемы и наблюдаемы.

Д о п у щ е н и е *3.* Нестационарный параметр $\boldsymbol{\theta}(t)$ является выходом линейного генератора:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{H}\boldsymbol{\xi}(t); \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}(t),$$

где $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор состояния генератора с неизвестными начальными условиями $\boldsymbol{\xi}(0)$, постоянные матрицы $\mathbf{H}$ и $\boldsymbol{\Gamma}$ известны.

Цель работы заключается в построении наблюдателя вектора переменных состояния объекта (1), обеспечивающего выполнение следующих равенств:

$$\left|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right| = 0, \ \left|f(t) - \hat{f}(t)\right| = 0, \ t \ge \tau > 0,$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t)$ — оценка вектора состояния, $\hat{f}(t)$ — оценка возмущения, τ — положительное число.

Построение наблюдателя по выходу. Рассмотрим систему (1) с относительной степенью $r \le n$. Построим для нее наблюдатель состояния по выходу вида

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{LC}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}y^{(r)}(t), \tag{2}$$

где матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ обеспечивают выполнение следующих условий:

$$\mathbf{B} - \mathbf{GCA}^{r-1}\mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{GCA}^{r}. \tag{4}$$

Введем ошибку наблюдения $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$. Продифференцировав $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ с учетом (1) и (2), получим ее динамическую модель:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\left[u(t) + f(t)\right] - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{LC}\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{G}y^{(r)}(t) =$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(u + f) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{LC}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{GCA}^{r}\mathbf{x} - \mathbf{GCA}^{r-1}\mathbf{B}(u + f).$$

Так как в (4) $\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{GCA}^{r}$, то

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{LC}\tilde{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{B} - \mathbf{GCA}^{r-1}\mathbf{B}\right)(u + f).$$

Обозначив $\mathbf{F} = \mathbf{M} - \mathbf{LC}$, получим

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = F\tilde{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{B} - \mathbf{GCA}^{r-1}\mathbf{B}\right)(u + f). \tag{5}$$

Подставим выражения (3) в (5):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}(t). \tag{6}$$

Очевидно, что если матрица $\mathbf{F}$ гурвицева, то $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ экспоненциально сходится к нулю. С другой стороны, для построения наблюдателя (2) требуется решить систему уравнений (3), (4). Данная система уравнений разрешима, если выполняется следующее условие:

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}\right) = \operatorname{rank}\mathbf{B}.$$

Доказательство приведено в работе [17].

Для уменьшения времени сходимости применим другой поход, использующий метод динамического расширения регрессора с конечным временем сходимости (FT DREM) [18]. Введем следующие вспомогательные переменные:

$$\begin{gathered}
\mathbf{z}_1 = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}y^{(r-1)}, \\
\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y + \mathbf{G}y^{(r)} - \mathbf{G}y^{(r)} = \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_1 + \mathbf{G}y^{(r-1)}\right) + \mathbf{L}y, \\
\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 - \mathbf{F}\mathbf{G}y^{(r-2)}, \\
\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_1 + \mathbf{G}y^{(r-1)}\right) + \mathbf{L}y - \mathbf{F}\mathbf{G}y^{(r-1)} = \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_2 + \mathbf{F}\mathbf{G}y^{(r-2)}\right) + \mathbf{L}y, \\
\vdots \\
\mathbf{z}_r = \mathbf{z}_{r-1} - \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y, \\
\dot{\mathbf{z}}_r = \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y\right) + Ly.
\end{gathered} \tag{7}$$

Оценка вектора состояния примет вид

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{G}y^{(r-1)} = \mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \cdots + \mathbf{G}y^{(r-1)}. \tag{8}$$

Решая (6) с учетом (7), (8), получаем

$$\mathbf{x} - [\mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \cdots + \mathbf{G}y^{(r-1)}] = e^{\mathbf{F}t}\tilde{\mathbf{x}}(0), \tag{9}$$

где $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ — начальная ошибка наблюдения.

Умножив уравнение (9) на матрицу $\mathbf{C}$, получим

$$y - \mathbf{C}(\mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \cdots + \mathbf{G}y^{(r-1)}) = \mathbf{C}e^{\mathbf{F}t}\tilde{\mathbf{x}}(0).$$

Применив фильтр $(r-1)$-го порядка $\dfrac{\lambda_1^{r-1}}{(p+\lambda_1)^{r-1}}$, где $p = \dfrac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, получим следующее выражение:

$$q_1(t) = \mathbf{m}_1^T \mathbf{k}_1, \tag{10}$$

где

$$q_1(t) = \frac{\lambda_1^{r-1}}{(p+\lambda_1)^{r-1}}\left[y - \mathbf{C}\left(\mathbf{z}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \cdots + \mathbf{G}y^{(r-1)}\right)\right],\ \mathbf{m}_1^T = \frac{\lambda_1^{r-1}}{(p+\lambda_1)^{r-1}}\left[\mathbf{C}e^{\mathbf{F}t}\right],\ \mathbf{k}_1 = \tilde{\mathbf{x}}(0).$$

Уравнение (10) имеет вид линейной регрессии. Используем метод FT DREM для определения значения $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ [18]. После расширения системы (10) на $n-1$ уравнений путем применения к сигналам различных линейных фильтров первого порядка получим систему из n скалярных уравнений

$$\bar{\mathbf{q}}_1(t) = \bar{\mathbf{m}}_1(t)\mathbf{k}_1.$$

Умножив уравнение на союзную матрицу $\operatorname{adj}\left(\bar{\mathbf{m}}_1(t)\right)$, получим, что каждый элемент вектора $\mathbf{k}_1$ может быть определен с применением градиентного спуска:

$$\dot{\hat{k}}_{1i} = \gamma_{1i}\Delta_1(t)\left[\Upsilon_{1i} - \Delta_1(t)\hat{k}_{1i}\right], \tag{11}$$

где $\Delta_1(t) = \det\left(\bar{\mathbf{m}}_1(t)\right)$, $\Upsilon_{1i} = \operatorname{adj}\left(\bar{\mathbf{m}}_1(t)\right)\bar{\mathbf{q}}_1(t)$, или его финитной модификации для обеспечения сходимости за конечное время:

$$\hat{k}^*_{1i}(t) = \frac{1}{1-\upsilon^c_i(t)}\left[\hat{k}_{1i}(t) - \upsilon^c_i(t)\hat{k}_{1i}(0)\right], \tag{12}$$

где

$$\upsilon^c_{1i}(t) = \begin{cases} \mu_{1i}, \text{ если } \upsilon_{1i}(t) \ge \mu_{1i}; \\ \upsilon_{1i}(t), \text{ если } \upsilon_{1i}(t) < \mu_{1i}; \end{cases}$$

$$\mu_{1i} \in (0,1),$$

$$\dot{\upsilon}_{1i}(t) = -\gamma_{1i}\Delta_1^2(t)\upsilon_{1i}(t), \upsilon_{1i}(0) = 1, \gamma_{1i} > 0.$$

На основе полученных уравнений сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть производные выходного сигнала доступны для измерения и сигнал $\Delta_1(t) \notin \mathbf{L}_2$, тогда наблюдатель (2) с алгоритмом адаптации (10)—(12) обеспечивает оценку вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ за конечное время.

Синтез вспомогательного наблюдателя. Предложенный наблюдатель обеспечивает оценку вектора состояния при условии измерения производных выходного сигнала. Подставив выражение для оценки $\mathbf{x}(t)$ в (1), с учетом допущения 3 получим

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}\dot{y} + \cdots + \mathbf{G}y^{(r)} = \mathbf{A}\left(\bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \cdots + \mathbf{G}y^{(r-1)}\right) +$$

$$+\mathbf{B}(\bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \cdots + \mathbf{G}y^{(r-1)})^T\mathbf{H}e^{\mathbf{\Gamma}t}\xi(0) + \mathbf{B}f(t), \tag{13}$$

где $\bar{\mathbf{z}}_r(t) = \mathbf{z}_r(t) + e^{\mathbf{F}t}\tilde{\mathbf{x}}(0)$, $\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{H}e^{\mathbf{\Gamma}t}\xi(0)$.

В уравнении (13) присутствуют производные выходного сигнала, неизвестное внешнее возмущение и начальные условия $\xi(0)$. Для решения проблемы, связанной неизмеримостью производных сигнала $y(t)$, применим линейные фильтры *r*-го порядка и лемму о перестановках [19], что позволит исключить члены, содержащие $\xi(0)$. Для упрощения дальнейшего изложения рассмотрим случай, когда относительная степень равна двум, а возмущение представлено синусоидой. При этом уравнение (13) примет вид

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_2 + \mathbf{F}\mathbf{G}\dot{y} + \mathbf{G}\ddot{y} = \mathbf{A}\left(\bar{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{F}\mathbf{G}y + \mathbf{G}\dot{y}\right) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{F}\mathbf{G}y + \mathbf{G}\dot{y})^T\mathbf{H}e^{\mathbf{\Gamma}t}\xi(0) + \mathbf{B}f.$$

Применим фильтр $\dfrac{\lambda_2^2}{(p+\lambda_2)^2}$ и лемму о перестановках [19]:

$$\mathbf{B}\frac{\lambda_2}{p+\lambda_2}\left[\dot{y}\mathbf{G}^T\mathbf{H}e^{\mathbf{\Gamma}t}\xi(0)\right] =$$

$$= \mathbf{B}\left\{\mathbf{G}^T\mathbf{H}e^{\mathbf{\Gamma}t}\xi(0)\frac{\lambda_2 p}{p+\lambda_2}[y] - \frac{1}{p+\lambda_2}\left[\mathbf{G}^T\mathbf{H}\mathbf{\Gamma}e^{\mathbf{\Gamma}t}\xi(0)\frac{\lambda_2 p}{p+\lambda_2}[y]\right]\right\} =$$

$$= \left\{\mathbf{B}\frac{\lambda_2 p}{p+\lambda_2}[y]\mathbf{G}^T\mathbf{H}e^{\mathbf{\Gamma}t} - \mathbf{B}\frac{1}{p+\lambda_2}\left[\frac{\lambda_2 p}{p+\lambda_2}[y]\mathbf{G}^T\mathbf{H}\mathbf{\Gamma}e^{\mathbf{\Gamma}t}\right]\right\}\xi(0) = \mathbf{B}S_1^*\xi(0).$$

Перепишем данное уравнение в следующей форме:

$$q_2(t) = \mathbf{B}\left[S_0^*(t) + \frac{\lambda_2}{p+\lambda_2}\left[S_1^*(t) \right] \right] \boldsymbol{\xi}(0) + \mathbf{B}\bar{f}(t),$$

где

$$q_2(t) = \frac{\lambda_2^2}{(p+\lambda_2)^2}\left[\left(\dot{\bar{\mathbf{z}}}_2 + \mathbf{FG}\dot{y} + \mathbf{G}\ddot{y} \right) - \mathbf{A}\left(\bar{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{FG}y + \mathbf{G}\dot{y} \right) \right],$$

$$S_0^*(t) = \frac{\lambda_2^2}{(p+\lambda_2)^2}\left[\left(\bar{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{FG}y \right)^T \mathbf{H}e^{\boldsymbol{\Gamma} t} \right],\ \bar{f}(t) = \frac{\lambda_2^2}{(p+\lambda_2)^2}\left[f(t) \right].$$

Таким образом, путем применения фильтра к (13) после ряда преобразований получаем следующее выражение для системы с произвольной относительной степенью:

$$q_r(t) = \mathbf{B}\left[S_0(t) + \frac{\lambda^{r-1}}{(p+\lambda)^{r-1}}\left[S_1(t) \right] + \ldots + S_{r-1}(t) \right] \boldsymbol{\xi}(0) + \mathbf{B}\frac{\lambda^r}{(p+\lambda)^r}\left[f(t) \right], \tag{14}$$

где

$$q_r(t) = \frac{\lambda^r}{(p+\lambda)^r}\left[\left(\dot{\bar{\mathbf{z}}}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}\dot{y} + \cdots + \mathbf{G}y^{(r)} \right) - \mathbf{A}\left(\bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y + \cdots + \mathbf{G}y^{(r-1)} \right) \right],$$

$$S_0^*(t) = \frac{\lambda^r}{(p+\lambda)^r}\left[(\bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}y)^T \mathbf{H}e^{\boldsymbol{\Gamma} t} \right],\ \bar{f}(t) = \frac{\lambda^r}{(p+\lambda)^r}\left[f(t) \right].$$

Полученное уравнение в упрощенном виде выглядит следующим образом:

$$q_r(t) = \mathbf{B}\bar{S}_r(t)\boldsymbol{\xi}(0) + \mathbf{B}\bar{f}(t). \tag{15}$$

Далее, используя свойства синусоидального сигнала

$$p^2\bar{f}(t) = -\omega^2\bar{f}(t),$$

где ω — частота, перепишем уравнение (15):

$$p^2\left[q_r(t) - \mathbf{B}\bar{S}_r(t)\boldsymbol{\xi}(0) \right] = -\omega^2\left[q_r(t) - \mathbf{B}\bar{S}_r(t)\boldsymbol{\xi}(0) \right]. \tag{16}$$

Для получения линейной регрессии из уравнения (16) потребуется только его первая строка. Умножим (16) на матрицу-строку $\bar{\mathbf{B}}$, такую что $\bar{\mathbf{B}}\mathbf{B} = 1$. Затем применим фильтр второго порядка $\frac{\lambda_r^2}{(p+\lambda_r)^2}$, где $\lambda_r > 0$, и сгруппируем неизвестные члены для получения регрессионного уравнения следующего вида:

$$q_r^*(t) = \mathbf{m}_r^T\mathbf{k}_r, \tag{17}$$

где

$$q_r^*(t) = \bar{\mathbf{B}}\frac{\lambda_r^2 p^2}{(p+\lambda_r)^2}\left[q_r(t) \right],\ \mathbf{m}_r^T = \left\{ \frac{\lambda_r^2 p^2}{(p+\lambda_r)^2}\left[\bar{S}_r(t) \right], \frac{\lambda_r^2}{(p+\lambda_r)^2}\left[q_r(t) \right] - \frac{\lambda_r^2}{(p+\lambda_r)^2}\left[\bar{S}_r(t) \right] \right\},$$

$$\mathbf{k}_r = \left[\boldsymbol{\xi}(0), \omega^2, \omega^2\boldsymbol{\xi}(0) \right].$$

На основе (17) могут быть сформированы оценки начальных условий вектора нестационарных параметров $\hat{\boldsymbol{\xi}}(0)$ и частоты возмущения $\hat{\omega}$. Переходные процессы оценивания могут иметь как асимптотический характер сходимости (метод градиентного спуска [20]), так и

сходимость за конечное время (метод FT DREM) [18]). Аналогично утверждению 1, предлагается использовать метод FT DREM.

После расширения регрессии получим линейное уравнение вида

$$\bar{\mathbf{q}}_r(t) = \bar{\mathbf{m}}_r(t)\mathbf{k}_r.$$

Умножим уравнение на союзную матрицу $\operatorname{adj}\left(\bar{\mathbf{m}}_r(t)\right)$. Тогда каждый элемент вектора $\mathbf{k}_r$ определяется следующим образом:

$$\dot{\hat{k}}_{ri} = \gamma_{ri}\Delta_r(t)\left[\Upsilon_{ri} - \Delta_r(t)\hat{k}_{ri}\right]; \tag{18}$$

$$\hat{k}^*_{ri}(t) = \frac{1}{1-\upsilon^c_{ri}(t)}\left[\hat{k}_{ri}(t) - \upsilon^c_{ri}(t)\hat{k}_{ri}(0)\right], \tag{19}$$

где $\Delta_r(t) = \det\left(\bar{\mathbf{m}}_r(t)\right)$; $\Upsilon_{ri} = \operatorname{adj}\left(\bar{\mathbf{m}}_r(t)\right)\bar{\mathbf{q}}_r(t)$; $\upsilon^c_{ri}(t)$ определяется через функцию

$$\upsilon^c_{ri}(t) = \begin{cases} \mu_{ri}, \text{ если } \upsilon_{ri}(t) \geq \mu_{ri}; \\ \upsilon_{ri}(t), \text{ если } \upsilon_{ri}(t) < \mu_{ri}; \end{cases}$$

$$\mu_{ri} \in (0,1),$$

$$\dot{\upsilon}_{ri}(t) = -\gamma_{ri}\Delta^2_r(t)\upsilon_{ri}(t), \upsilon_{ri}(0) = 1, \gamma_{ri} > 0.$$

Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть объект управления, описываемый уравнением (1), удовлетворяет допущениям 1—3, вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ восстанавливается согласно утверждению 1 и сигнал $\Delta_r(t) \notin \mathbf{L}_2$. Тогда алгоритм (17)—(19) обеспечивает оценку начальных условий вектора нестационарных параметров $\xi(0)$ и частоты внешнего возмущения за конечное время.

Из уравнения (15) с учетом утверждения 2 получаем

$$\bar{f}(t) = \bar{\mathbf{B}}q_r(t) - \bar{S}_r(t)\xi(0) = a_1\sin(\omega t) + a_2\cos(\omega t) = \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{a}, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = \left[\sin(\omega t); \cos(\omega t)\right]$, $\mathbf{a} = \left[a_1 a_2\right]$.

Утверждение 2 обеспечивает оценку $\bar{f}(t)$ и ω. Тогда линейное регрессионное уравнение (20) может быть решено с помощью метода FT DREM для определения амплитуды возмущения. Аналогично адаптивному алгоритму (10)—(12) или (17)—(19) амплитуда определяется следующим образом:

$$\dot{\hat{a}}_i = \gamma_{ai}\Delta_a(t)\left[\Upsilon_{ai} - \Delta_a(t)\hat{a}_i\right], \tag{21}$$

$$\hat{a}^*_i(t) = \frac{1}{1-\upsilon^c_{ai}(t)}\left[\hat{a}_{ai}(t) - \upsilon^c_{ai}(t)\hat{a}_{ai}(0)\right]. \tag{22}$$

С другой стороны, с учетом найденного в (21), (22) значения амплитуды вместе с (14) очевидно, что внешнее возмущение $f(t)$ может быть восстановлено следующим образом:

$$f(t) = \frac{(p+\lambda)^r}{\lambda^r}\left[\bar{f}(t)\right]. \tag{23}$$

Отметим, что при известных параметрах $\bar{f}(t)$ его производные могут быть вычислены в силу гармонической природы сигнала. После определения всех нестационарных параметров и внешних возмущений несложно построить наблюдатель состояния для системы (1). Задача

может быть решена с использованием любого классического подхода, например с помощью наблюдателя Люенбергера. Для повышения эффективности и скорости сходимости наблюдателя состояния предлагается использовать подход, описанный в утверждении 1.

Математическое моделирование. Для демонстрации работоспособности и эффективности предложенного подхода рассмотрим объект управления второго порядка с относительной степенью $r = 2$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\left[\boldsymbol{\theta}^T(t)\mathbf{x}(t) + f(t)\right]; \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned}\right\}$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = 5\sin t$, параметр $\boldsymbol{\theta}^T(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ генерируется выходом линейного генератора с матрицами $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma} = 0_m$, $\boldsymbol{\xi}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; поскольку параметр θ_1 умножается на $y(t)$, будем полагать, что значение $\theta_1 = 0$ известно.

Построим наблюдатель вида (2) с матрицами

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}\left[(\mathbf{CAB})^T\mathbf{CAB}\right]^{-1}(\mathbf{CAB})^T, \mathbf{T} = \mathbf{I}_n - \mathbf{GCA}, \mathbf{M} = \mathbf{TA},$$

$$\mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{M}^T, \mathbf{C}^T, [-0{,}5, -0{,}3])^T, \mathbf{F} = \mathbf{M} - \mathbf{LC}$$

при начальных условиях наблюдателя $\mathbf{z}_2(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Фильтры выберем следующим образом:

$$\frac{\lambda_1}{p+\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{p+\lambda_2} = \frac{\lambda_a}{p+\lambda_a} = \ldots = \frac{\lambda_r}{p+\lambda_r} = \frac{10}{p+10}.$$

Матрицу $\bar{\mathbf{B}}$ зададим как $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Параметры адаптивного алгоритма FT DREM выбраны следующим образом: $\gamma_{1i} = \gamma_{2i} = \gamma_{ai} = \gamma_{ri} = 10^6$, $\mu_{1i} = \mu_{2i} = \mu_{ai} = \mu_{ri} = 0{,}98$.

На рис. 1—3 показаны переходные процессы моделирования алгоритмов (10)—(12), (17)—(20) и (21)—(23): рис. 1, *а*, *б* — оценка вектора начальной ошибки наблюдения $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}(0)$ и оценка ошибки вектора состояния $\tilde{\mathbf{x}}(0)$; рис. 2, *а*, *б* — оценка вектора начальных условий генератора возмущения $\hat{\boldsymbol{\xi}}(0)$ и оценка частоты внешнего возмущения $\hat{\omega}(t)$; рис. 3, *а*, *б* — оценка внешнего возмущения $\hat{f}(t)$ и ошибка оценки внешнего возмущения $\tilde{f}(t) = f(t) - \hat{f}(t)$.

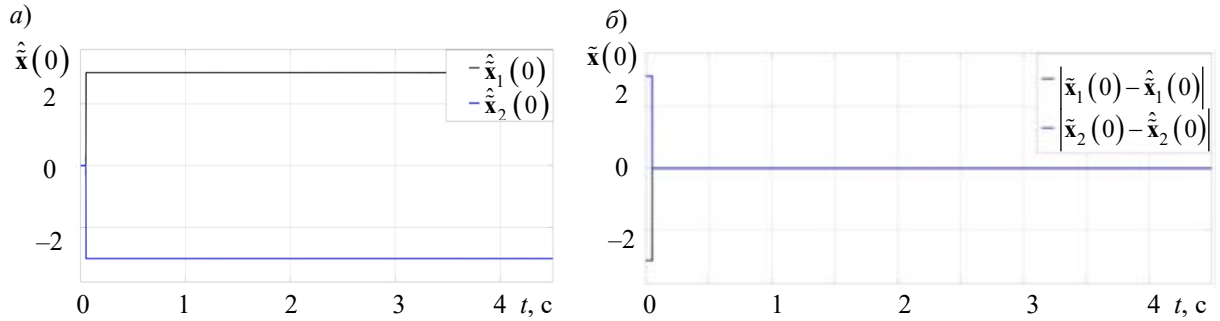


Рис. 1

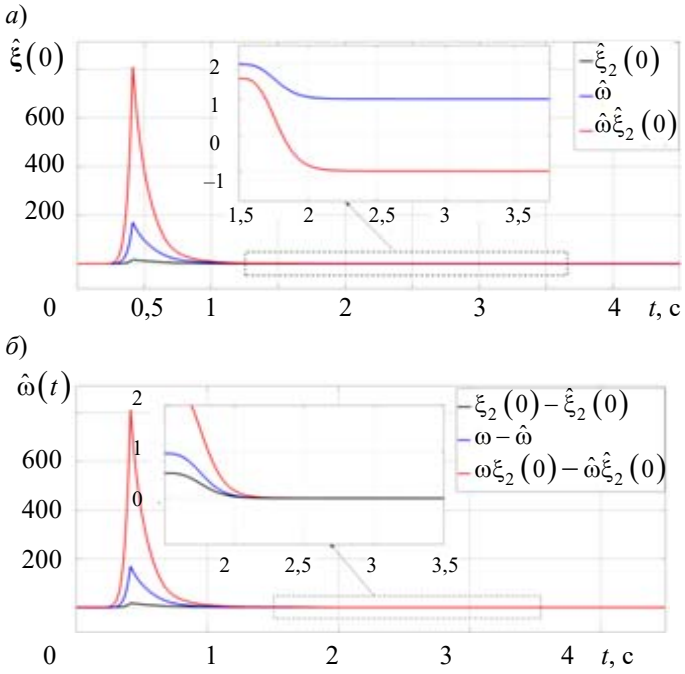


Рис. 2

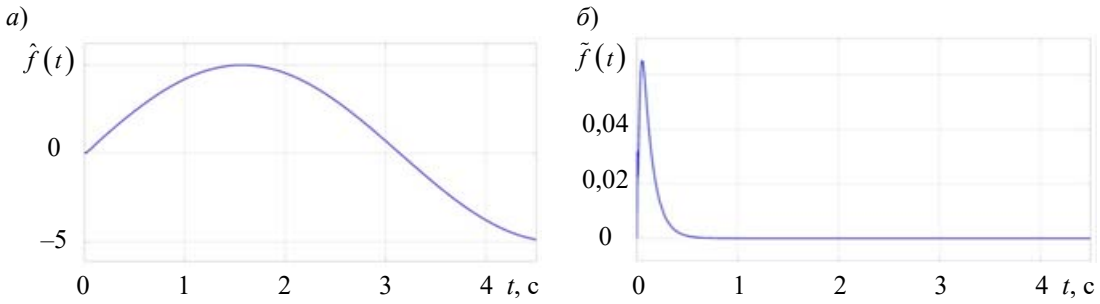


Рис. 3

Заключение. Рассмотрена задача синтеза наблюдателя по выходу для класса линейных нестационарных систем с внешним мультигармоническим возмущением. Преимуществом предложенного метода является возможность решения задачи наблюдения вектора состояния по выходу для объектов с произвольной относительной степенью. Представленный подход также обеспечивает идентификацию нестационарных параметров и возмущения. Работоспособность рассмотренного подхода подтверждается результатами компьютерного моделирования. В дальнейшем представленное решение может быть расширено на класс объектов с нелинейностями или нестационарными параметрами, генератор которых неизвестен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kailath T.* Linear Systems. Upper Saddle River. NJ: Prentice-Hall, 1985.
2. *O'Reilly J.* Observers for Linear Systems. N. Y.: Academic, 1983.
3. *Barnett S.* Introduction to Mathematical Control Theory. Oxford, UK: Clarendon, 1975.
4. *Во К. Д., Бобцов А. А.*Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // Автоматика и телемеханика. 2020. № 12. С. 100—110.
5. *Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N.* Adaptive state estimation of state-affine systems with unknown timevarying parameters // Intern. Journal of Control. 2021. Vol. 95, N 9. P. 1—26. DOI: 10.1080/00207179.2021.1913647.

6. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // arXiv preprint arXiv:2111.11716, 2021.

7. *Кочетков С. А.* Об одном алгоритме идентификации параметров в линейных нестационарных системах // Тр. IX Междунар. конф. „Идентификация систем и задачи управления“ SICPRO'12. 2012. С. 195—209.

8. *Bobtsov A., Nikolaev N., Slita O., Kozachek O., Oskina O.* Adaptive observer for a LTV system with partially unknown state matrix and delayed measurements // 14th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. ICUMT-2022. 2022. P. 165—170.

9. *Hou M., Muller P. C.* Design of Observers for Linear Systems with Unknown Inputs // IEEE Trans. on Automatic Control. 1992. Vol. 37, N 6. P. 871—875.

10. *Hou M., Muller P. C.* Disturbance Decoupled Observer Design: A Unified Viewpoint // IEEE Trans. on Automatic Control. 1994. Vol. 39, N 6. P. 1338—1341.

11. *Chen J., R. Patton J., Zhang H.* Design of Unknown Input Observers and Robust Fault Detection Filters // Intern. Journal of Control. 1996. Vol. 63. P. 85—105.

12. *Shen Z.* Nonlinear unknown input observer design by LMI for lipschitz nonlinear systems // 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. 2010. P. 3450—3454.

13. *Malikov A. I.* State and unknown inputs observers for time-varying nonlinear systems with uncertain disturbances //Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019.Vol 40.P. 769—775.

14. *Chen W., Saif M.* High-order sliding-mode differentiator based actuator fault diagnosis for linear systems with arbitrary relative degree and unmatched Unknown Inputs // Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision and Control. IEEE. 2006. P. 1153—1158.

15. *Coutinho P. H., Bessa I., Xie W. B., Nguyen A. T.* A sufficient condition to design unknown input observers for nonlinear systems with arbitrary relative degree // Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control. 2022. Vol. 32, N 15. P. 8331—8348.

16. *Park Tae-Geon, Kim D.* Design of unknown input observers for linear systems with unmatched unknown inputs // Trans. of the Institute of Measurement and Control. 2014. Vol. 36, N 3. P. 399—410.

17. *Chen J., Patton R. J.* Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems. N. Y.: Springer Science & Business Media, 2012.

18. *Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A. A., Astolfi A., Bobtsov A. A.* New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases // IEEE Trans. on Automatic Control. 2020. Vol. 66, N 5. P. 2265—2272.

19. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. М.: Наука, 1991.

20. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S.* Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing // Systems & Control Letters. 2019. Vol. 133. P. 104519.

Сведения об авторах

Ван Хуан Буй — аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: buinguyenkhanh201095@gmail.com

Алексей Анатольевич Маргун — канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; Институт проблем машиноведения РАН; доцент; E-mail: alexeimargun@gmail.com

Алексей Алексеевич Бобцов — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: bobtsov@mail.ru

Поступила в редакцию 29.11.2023; одобрена после рецензирования 07.12.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. Kailath T. *Linear Systems*, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1985.
2. O'Reilly J. *Observers for Linear Systems*, NY, Academic, 1983.
3. Barnett S. *Introduction to Mathematical Control Theory*, Oxford, UK, Clarendon, 1975.
4. Quoc D.V., Bobtsov A.A. *Automation and Remote Control*, 2020, no. 12(81), pp. 2220–2229.
5. Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N. *Intern. Journal of Control*, 2021, no. 9(95), pp. 1–26, DOI:10.1080/00207179.2021.1913647.

6. Glushchenko A., Lastochkin K. *arXiv preprint arXiv:2111.11716*, 2021.
7. Kochetkov S.A. *Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya, SICPRO'12* (System Identification and Control Problems, SICPRO'12), Proc. of the IX Intern. Conf., 2012, pp. 195–209. (in Russ.)
8. Bobtsov A., Nikolaev N., Slita O., Kozachek O., Oskina O. *14th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*, ICUMT-2022, 2022, pp. 165–170.
9. Hou M., Muller P.C. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1992, no. 6(37), pp. 871–875.
10. Hou M., Muller P.C. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, no. 6(39), pp. 1338–1341.
11. Chen J., Patton R.J., Zhang H. *Intern. Journal of Control*, 1996, vol. 63, pp. 85–105.
12. Shen Z. *8th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2010, pp. 3450–3454.
13. Malikov A.I. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, pp. 769–775.
14. Chen W., Saif M. *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision and Control*, IEEE, 2006, pp. 1153–1158.
15. Coutinho P.H., Bessa I., Xie W.B., Nguyen A.T. *Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, no. 15(32), pp. 8331–8348.
16. Park Tae-Geon, Kim D. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2014, no. 3(36), pp. 399–410.
17. Chen J., Patton R.J. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*, NY, Springer Science & Business Media, 2012.
18. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A.A., Astolfi A., Bobtsov A.A. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2020, no. 5(66), pp. 2265–2272.
19. Ljung L. *System Identification, Theory for the User*, NJ, PTR Prentice Hall, 1987.
20. Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S. *Systems & Control Letters*, 2019, vol. 133, pp. 104519.

Data on authors

Van Huan Bui — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: buinguyenkhanh201095@gmail.com

Alexey A. Margun — PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS; Associate Professor; E-mail: alexeimargun@gmail.com

Alexey A. Bobtsov — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: bobtsov@mail.ru

Received 29.11.2023; approved after reviewing 07.12.2023; accepted for publication 14.01.2024.

УДК 534.1
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-220-229

МУЛЬТИСТАБИЛЬНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОДНОПОЛЯРНОЙ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Ж. Т. Жусубалиев[1], А. З. Абдирасулов[2], У. А. Сопуев[2], Е. А. Коломиец[1*]

[1]*Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия*
[*]*lenus07@yandex.ru*
[2]*Ошский государственный университет, Ош, Киргизия*

Аннотация. Исследуется динамика негладкого отображения с большим числом многообразий переключения, описывающего поведение однополярной широтно-импульсной системы управления энергообеспечением нагревательной установки (печи) для выращивания монокристаллов сапфира. Показано, что такое отображение демонстрирует особый тип мультистабильности, когда в фазовом пространстве динамической системы сосуществуют несколько вложенных друг в друга притягивающих замкнутых инвариантных кривых, соответствующих устойчивым двухчастотным колебаниям. Результаты исследований важны для создания новых способов прогнозирования, обнаружения, подавления нерегулярных колебаний и катастрофических явлений, возникающих при вариации параметров и воздействии помех, а также для проектирования импульсных систем автоматического управления с заданными динамическими свойствами и прогнозируемой динамикой.

Ключевые слова: *мультистабильность, бифуркации граничного столкновения, негладкое непрерывное отображение, квазипериодическая седло-узловая бифуркация, замкнутая инвариантная кривая, двухчастотные колебания*

Благодарности: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, программа стратегического академического лидерства „Приоритет-2030“, гранты № 1.71.23 П, 1.7.21/S-2, и Ошского государственного университета, грант № 14-22.

Ссылка для цитирования: *Жусубалиев Ж. Т., Абдирасулов А. З., Сопуев У. А., Коломиец Е. А.* Мультистабильная динамика системы управления с однополярной широтно-импульсной модуляцией // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 220—229. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-220-229.

MULTISTABLE DYNAMICS OF A CONTROL SYSTEM WITH UNIPOLAR PULSE-WIDTH MODULATION

Zh. T. Zhusubaliyev[1], A. Z. Abdirasulov[2], U. A. Sopuev[2], E. A. Kolomiets[1*]

[1]*Southwest State University, Kursk, Russia*
[*]*lenus07@yandex.ru*
[2]*Osh State University, Osh, Kirghizia*

Abstract. The dynamics of a non-smooth mapping with a large number of switching manifolds, which describes the behavior of a unipolar pulse-width control system for the energy supply of a heating installation (furnace) for growing sapphire single crystals, is studied. Such a mapping is shown to demonstrate a special type of multistability, when several nested attractive closed invariant curves corresponding to stable two-frequency oscillations coexist in the phase space of the dynamic system. Results of the research are important for creating new methods of predicting, detecting, and suppressing irregular oscillations and catastrophic phenomena that arise when parameters vary and are exposed to interference, as well as for designing pulsed automatic control systems with specified dynamic properties and predictable dynamics.

Keywords: multistability, border collision bifurcations, non-smooth continuous mapping, quasi-periodic saddle-node bifurcation, closed invariant curve, two-frequency oscillations

Acknowledgements: the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, the program of strategic academic leadership “Priority-2030”, grants No. 1.71.23 P, 1.7.21/S-2, and Osh State University, grant No. 14-22.

For citation: Zhusubaliyev Zh. T., Abdirasulov A. Z., Sopuev U. A., Kolomiets E. A. Multistable dynamics of a control system with unipolar pulse-width modulation. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 220—229 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-220-229.

© Жусубалиев Ж. Т., Абдирасулов А. З., Сопуев У. А., Коломиец Е. А., 2024

Введение. Мультистабильность или одновременная устойчивость нескольких режимов — широко распространенное явление в нелинейных динамических системах [1—3], которое проявляется в существовании нескольких устойчивых режимов при одних и тех же значениях параметров.

Глобальная устойчивость является редким свойством нелинейных систем, поскольку из этого свойства вытекает, что существует единственный аттрактор, притягивающий все траектории фазового пространства. Реальные же системы демонстрируют мультистабильное поведение.

В настоящей статье исследуется особый тип мультистабильности в негладких отображениях, когда сосуществуют несколько вложенных друг в друга притягивающих замкнутых инвариантных кривых, соответствующих устойчивым двухчастотным колебаниям. Изначально этот феномен был обнаружен авторами работ [4—6] в конкретном классе моделей физических систем и долгое время считался экзотическим примером динамического поведения. В [7] на примере кусочно-линейного непрерывного отображения (нормальной формы) показано, что этот вид мультистабильности — общее свойство широкого класса негладких динамических систем (см. также [8]).

Напомним, что негладкие отображения возникают при моделировании многих задач теории управления, механики, физики, биологии и медицины. Такие отображения „сшиваются“ из отдельных гладких функций, области определения которых разделены так называемыми *многообразиями переключения*. При вариации параметров неподвижная/периодическая точка дискретной системы (отображения) сталкивается с одним из многообразий переключения (бифуркации „граничного столкновения“ — Border Collision Bifurcations) [9, 10]. Это приводит к нарушению условий существования неподвижной/периодической точки и, как следствие, вызывает необычные нелинейные явления, например непрерывный переход от одного типа периодического движения к другому, „умножение“ периода колебаний, рождение из неподвижной точки хаотических режимов в результате единственной бифуркации [11—13].

Бифуркации „граничного столкновения“ [9] не имеют аналогов в гладких системах и не связаны с нарушением условия гиперболичности неподвижной/периодической точки, поэтому они не поддаются анализу методами классической теории бифуркаций.

Основная цель данной работы — изучение механизмов рождения и трансформаций вложенных друг в друга замкнутых инвариантных кривых в дискретной модели (негладкого непрерывного отображения) однополярной широтно-импульсной системы управления энергообеспечением печи для выращивания монокристаллов сапфира. Подробное описание нагревательной установки (печи) приведено в [14].

Постановка задачи. Уравнение движения рассматриваемой системы в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\dot{x} = \lambda_1(x - S(t,x,y));\ \dot{y} = \lambda_2(y - S(t,x,y));\ S(t,x,y) = S(t+1,x,y); \qquad (1)$$

здесь $S(t,x,y)$ — кусочно-постоянная функция:

$$S = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4},$$

$$S_1 = \operatorname{sgn}(\varphi - \eta_1),\ S_2 = \operatorname{sgn}(\varphi + \eta_1),\ S_3 = \operatorname{sgn}(\varphi - \eta_2),\ S_4 = \operatorname{sgn}(\varphi + \eta_2);$$

$$\eta_1 = \frac{q}{\alpha\Gamma}(t - \lfloor t \rfloor),\ \eta_2 = \frac{q}{\alpha\Gamma}(1 - t + \lfloor t \rfloor),\ \varphi = \frac{q}{\Gamma} + x(t) - \vartheta y(t)\big|_{t=\lfloor t \rfloor},\ \vartheta = \lambda_1 / \lambda_2,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — функция, выделяющая целую часть аргумента; физический смысл переменных x, y, S и параметров $\lambda_1, \lambda_2, q, \alpha, \Gamma$ пояснен в [14].

Несложно доказать, что скользящих решений в системе (1) не может быть. Методика получения математических моделей рассматриваемого класса импульсных систем в безразмерной форме (1) приведена в [14].

Уравнения (1) сводятся к негладкому непрерывному отображению $F:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ вида

$$F:(x,y)\mapsto F(x,y),\ F(x,y)=\begin{cases} F_L(x,y), & (x,y)\in S_L;\\ F_M^{(1)}(x,y), & (x,y)\in S_M^{(1)};\\ F_M^{(2)}(x,y), & (x,y)\in S_M^{(2)};\\ F_M^{(3)}(x,y), & (x,y)\in S_M^{(3)};\\ F_M^{(4)}(x,y), & (x,y)\in S_M^{(4)};\\ F_R(x,y), & (x,y)\in S_R, \end{cases} \tag{2}$$

где $F(x,y)$ — кусочно-гладкая вектор-функция, в которой

$$F_L(x,y)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1}(x-1)+1\\ e^{\lambda_2}(y-1)+1\end{bmatrix};\ F_M^{(1)}(x,y)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1}(x-1)+\frac{1}{2}e^{\lambda_1(2-z)}+\frac{1}{2}\\ e^{\lambda_2}(y-1)+\frac{1}{2}e^{\lambda_2(2-z)}+\frac{1}{2}\end{bmatrix};$$

$$F_M^{(2)}(x,y)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1}(x-1/2)+\frac{1}{2}e^{\lambda_1(1-z)}\\ e^{\lambda_2}(y-1/2)+\frac{1}{2}e^{\lambda_2(1-z)}\end{bmatrix};\ F_M^{(3)}(x,y)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1}(x+1/2)-\frac{1}{2}e^{\lambda_1(1+z)}\\ e^{\lambda_2}(y+1/2)-\frac{1}{2}e^{\lambda_2(1+z)}\end{bmatrix};$$

$$F_M^{(4)}(x,y)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1}(x+1)-\frac{1}{2}e^{\lambda_1(2+z)}-\frac{1}{2}\\ e^{\lambda_2}(y+1)-\frac{1}{2}e^{\lambda_2(2+z)}-\frac{1}{2}\end{bmatrix};\ F_R(x,y)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1}(x+1)-1\\ e^{\lambda_2}(y+1)-1\end{bmatrix},$$

$$z=\frac{2\alpha\Gamma}{q}\varphi,\ \varphi=\frac{q}{\Gamma}+x-\vartheta y,\ \vartheta=\lambda_1/\lambda_2$$

и области определения функций $F_L(x,y),\ F_M^{(i)}(x,y),\ i=1,2,3,4,\ F_R(x,y)$ представлены как

$$S_L=\left\{(x,y):\frac{q}{\Gamma}+x-\vartheta y>\frac{q}{\alpha\Gamma}\right\};\ S_M^{(1)}=\left\{(x,y):\frac{q}{2\alpha\Gamma}\le\frac{q}{\Gamma}+x-\vartheta y\le\frac{q}{\alpha\Gamma}\right\};$$

$$S_M^{(2)}=\left\{(x,y):0\le\frac{q}{\Gamma}+x-\vartheta y<\frac{q}{2\alpha\Gamma}\right\};\ S_M^{(3)}=\left\{(x,y):-\frac{q}{2\alpha\Gamma}\le\frac{q}{\Gamma}+x-\vartheta y<0\right\};$$

$$S_M^{(4)}=\left\{(x,y):-\frac{q}{\alpha\Gamma}\le\frac{q}{\Gamma}+x-\vartheta y<-\frac{q}{2\alpha\Gamma}\right\};\ S_R=\left\{(x,y):\frac{q}{\Gamma}+x-\vartheta y<-\frac{q}{\alpha\Gamma}\right\}.$$

Каждая из функций $F_L(x,y),\ F_M^{(i)}(x,y),\ i=1,2,3,4$, и $F_R(x,y)$ — класса C^1 и монотонна во всей своей области определения $S_L,\ S_M^{(i)},\ i=1,2,3,4,\ S_R$. Границы этих областей называют многообразиями переключения, где производные первого порядка $F(x,y)$ по x и y не существуют.

Двухчастотные колебания и мультистабильность в негладких системах. Отображения вида (2) описывают двухчастотные колебания в негладких системах с мультистабильным поведением (см., например, [8]).

Двухчастотные режимы широко распространены в природе и технике. Такие колебания характеризуются двумя независимыми частотами. В фазовом пространстве динамической

системы (2) двухчастотным колебаниям соответствует аттрактор в форме замкнутой инвариантной кривой. Характер движения на инвариантной кривой определяется числом вращения, которое представляет собой отношение частот. Когда оно иррационально, инвариантная кривая плотно заполняется траекториями и динамика квазипериодична. При рациональном числе вращения на замкнутой кривой лежит пара периодических орбит: устойчивая и седловая, а сама инвариантная кривая образована неустойчивыми многообразиями седловой орбиты. Это относится к случаю захвата частоты, когда происходит синхронизация колебаний с двумя независимыми частотами в одно периодическое колебание с общим периодом. Причем отношение частот постоянно и рационально на интервале значений параметров.

Особенность мультистабильных систем заключается в высокой чувствительности к помехам, которые могут приводить к непрогнозируемым изменениям динамики. Для мультистабильных систем создана теория скрытых аттракторов [15—17].

Как известно [15], определение скрытых колебаний было введено для гладких автономных дифференциальных уравнений. Попытки ввести определение для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью или отображений были предприняты в работах [6, 18, 19]. Однако главная проблема исследования мультистабильности связана с поиском специальных инвариантных множеств, таких как репеллеры, седловые периодические орбиты [15—17] вместе с их устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия нельзя рассчитать ни аналитически, ни с помощью техники линеаризации. К настоящему времени разработано несколько численных методов расчета устойчивых и неустойчивых инвариантных множеств [20—28].

Стандартный подход к расчету инвариантных многообразий заключается в итерации так называемой фундаментальной области, когда итерируется локальная область седловой периодической орбиты [20, 29, 30]. Ограничимся упрощенным описанием подхода (детали см. в [20, 30]).

Идея такого подхода состоит в следующем [20, 30]. Обозначим через n_-, n_0 и n_+, $n_0 + n_- + n_+ = n$ — число мультипликаторов $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ седловой периодической точки $\mathbf{x}_0$ периода m: $F^m(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, $F^k(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{x}_0$, $1 \le k < m$, лежащих внутри, на границе и вне единичного круга соответственно. Напомним, что собственные значения $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ матрицы монодромии называются мультипликаторами периодической точки $\mathbf{x}_0$.

Подпространство собственных векторов матрицы монодромии, для которых $|\rho| < 1$, называется устойчивым E^s и неустойчивым E^u для $|\rho| < 1$ [30].

Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^*$ — гиперболическая седловая периодическая точка $n^- \cdot n^+ \neq 0$ на фазовой плоскости (2); здесь „$*$“ — знак транспонирования матрицы. Тогда $n^- = n^+ = 1$, так что существуют один вещественный мультипликатор, например, $|\rho_1| > 1$, а другой — тоже вещественный $|\rho_2| < 1$. В этом случае имеются два инвариантных многообразия, проходящие через $\mathbf{x}_0$, а именно: одномерное неустойчивое многообразие, образованное орбитами, сходящимися к $\mathbf{x}_0$ при итерации F^{-1}, и одномерное устойчивое многообразие, образованное множеством орбит, сходящихся к $\mathbf{x}_0$ при итерации F.

Для расчета неустойчивого многообразия из седловой периодической точки $\mathbf{x}_0$ откладывается N эквидистантных точек с малым шагом вдоль E^u. Затем каждая из таких точек поочередно выбирается в качестве начальной и производится большое число итераций $F : F^k$, $k = 1, 2, ..., M$. Устойчивое многообразие вычисляется аналогично как неустойчивое

многообразие обратной функции — F^{-k}, $k = 1,2,...,M$, т.е. путем итерации обратной функции в локальной области седлового цикла вдоль E^s; здесь N, $M \in \mathbb{N}^+$ — множество целых чисел без нуля.

В [23] предложен численный метод расчета устойчивых одномерных инвариантных многообразий двумерных отображений, не требующий определения обратной функции или ее аппроксимации. Это так называемый „Search Circle (SC)“-алгоритм [23]. Такой подход особенно важен в случае, когда нельзя получить отображение Пуанкаре аналитически для заданного векторного поля. Его можно использовать и в случае, когда отображение необратимо. Метод реализован в виде прикладной программы в пакете DsTool и в настоящее время является одним из эффективных в своем классе.

Численный алгоритм расчета одномерных устойчивых инвариантных многообразий седловых периодических орбит негладких непрерывных отображений предложен в [29]. Основу алгоритма составляет оригинальный метод построения обратной функции, состоящий в сведении этой задачи к численному решению скалярного уравнения независимо от порядка модели. Такой метод позволяет исключить необходимость решения систем нелинейных уравнений и преодолеть при этом вычислительные проблемы. В отличие от „Search Circle (SC)“-алгоритма [23], он обобщается на модели произвольного порядка, когда требуется расчет, например, двумерных инвариантных многообразий.

Следует отметить, что этот подход был реализован и опробован авторами для частного класса негладких непрерывных отображений с двумя многообразиями переключения [29], а также удалось обобщить его на негладкие непрерывные отображения с произвольным числом многообразий переключения. Кроме того, алгоритм, построенный на базе такого подхода, можно применить, как и [23], для необратимых негладких отображений. Эти результаты нигде не опубликованы, поэтому в представленной статье приведена только ссылка на работу [8], в которой расчет инвариантных многообразий выполнен с помощью указанного алгоритма.

И наконец, несколько слов об одной из самых сложных задач — задаче нахождения периодических движений [15—17]. Устойчивые и седловые периодические движения рассчитывались с помощью алгоритма, который базируется на процедуре сканирования выбранной области фазового пространства с переменным шагом для локализации решений уравнения неподвижной/периодической точки. Затем каждое локализованное решение уточняется итерационным методом Ньютона — Рафсона с заданной точностью. Алгоритм применялся при решении большого числа задач.

Бифуркационный анализ. Исследования проводились при следующих значениях параметров: $\lambda_1 = -0,3125$, $\lambda_2 = -0,03125$, $q = 13,727882855$, $\Gamma = 7,0$, $19,0 < \alpha < 21,0$. На рис. 1 изображена бифуркационная диаграмма, рассчитанная численно для $19,0 < \alpha < 21,0$ и $\Gamma = 7,0$. Диаграмма иллюстрирует основные стадии рождения и трансформаций сосуществующих аттракторов и рассчитывалась с помощью специального алгоритма. Для каждого значения варьируемого параметра α поиск аттракторов проводился при начальных условиях, генерируемых случайно, а также при начальных условиях, соответствующих точкам фазового пространства системы (2), лежащим на траекториях аттракторов, найденных на предыдущем значении α.

Алгоритм включает процедуры по определению направления изменения параметра α (в сторону возрастания или убывания) в пределах заданного диапазона его вариации и динамического изменения числа начальных условий, генерируемых случайно, которое учитывает информацию об аттракторах, найденных на предыдущих шагах вариации α.

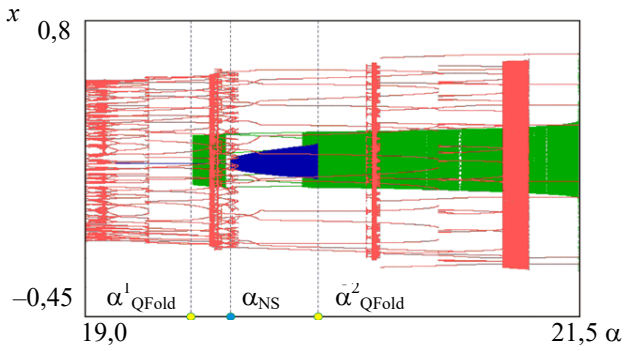


рис. 1

Бифуркационная диаграмма (см. рис. 1) содержит несколько ветвей. Ветвь, которая начинается с неподвижной точки, назовем основной. При увеличении α возникает устойчивая замкнутая инвариантная кривая через суперкритическую бифуркацию Неймарка — Сакера в точке α_{NS} из теряющей устойчивость неподвижной точки (см. первую ветвь на рис. 1). Вторая ветвь возникает жестко через седло-узловую квазипериодическую бифуркацию [30] в точке α^1_{QFold}, при которой рождается пара замкнутых инвариантных кривых — устойчивая и неустойчивая. До точки бифуркации α_{NS} устойчивая инвариантная кривая сосуществует с устойчивой неподвижной точкой и другим аттрактором, который в зависимости от параметров может быть периодическим, квазипериодическим или хаотическим.

На рис. 2, *а* показан фазовый портрет отображения для значения $\alpha = 19,87$, правее от точки бифуркации Неймарка — Сакера α_{NS}. Фазовый портрет иллюстрирует случай сосуществования трех аттракторов, два из которых — устойчивые замкнутые кривые, а третий — устойчивая периодическая орбита с периодом 15. Границей бассейнов притяжения сосуществующих инвариантных кривых (в отображениях на плоскости) является неустойчивая замкнутая кривая с периодической динамикой. Как и в [23], для наглядности фазовые портреты приводятся в исходных переменных $x_1 = -254,95(x - 9y)$, $x_2 = 7,967361(x - y)$, где x_1 — температура нагревательной установки в точке измерения, x_2 — производная x_1 по времени t. Пять вертикальных линий на фазовых портретах соответствуют многообразиям переключения.

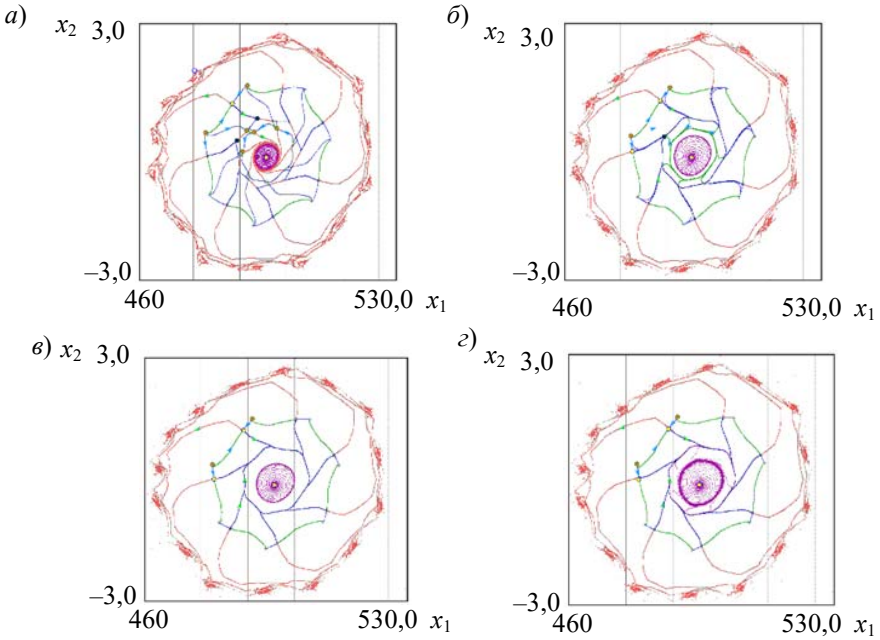


Рис. 2

Как видно из рис. 2, *а*, бассейны притяжения замкнутой резонансной инвариантной кривой и устойчивого 15-го цикла (обозначен светло-малиновым цветом на рис. 2, *а*—*г*) разделены неустойчивой замкнутой кривой, которая образована устойчивыми многообразиями седлового 7-го цикла и точками 7-го цикла, имеющего тип неустойчивого фокуса. Бассейны же притяжения замкнутой инвариантной кривой с квазипериодической динамикой, возникающей через бифуркацию Неймарка — Сакера (см. основную ветвь на рис. 1), и резонансной кривой периода 7 (вторая зеленая ветвь на рис. 1) разделены другой неустойчивой инвариантной кривой. Неустойчивая замкнутая кривая образована устойчивыми многообразиями седлового 7-го цикла и точками неустойчивого 7-го цикла (репеллера) другого типа. Устойчивая замкнутая инвариантная кривая с периодической динамикой (резонансная кривая периода 7) образована неустойчивыми многообразиями седлового 7-го цикла.

При дальнейшем увеличении α неустойчивая замкнутая кривая с периодической динамикой становится неустойчивой квазипериодической (зеленая кривая на рис. 2, *б*, $\alpha = 20{,}0$) через бифуркацию „граничного столкновения“. Затем, с увеличением α, аналогичную бифуркацию претерпевает устойчивая замкнутая кривая с периодической динамикой. В результате такой бифуркации она становится устойчивой кривой с квазипериодической динамикой (рис. 2, *в*, $\alpha = 20{,}12$). Бассейны притяжения сосуществующих квазипериодических аттракторов разделены неустойчивой квазипериодической инвариантной кривой, которая на рис. 2, *в* не показана (см. также замкнутую кривую, выделенную на рис. 2, *б* зеленым цветом).

И наконец, устойчивая (темно-малиновая на рис. 2, *в*), принадлежащая первой ветви бифуркационной диаграммы, и неустойчивая (зеленая на рис. 2, *б*) квазипериодические замкнутые кривые исчезают через седло-узловую квазипериодическую бифуркацию [30] при α^2_{QFold}. На рис. 2, *г*, $\alpha = 20{,}176165$, приведен фазовый портрет отображения после этой бифуркации, когда отображение демонстрирует бистабильную динамику: квазипериодический аттрактор второй ветви, который на бифуркационной диаграмме выделен зеленым цветом, сосуществует с устойчивым периодическим решением периода 15. Границей бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов является неустойчивая периодическая замкнутая кривая.

Заключение. Выполнен бифуркационный анализ негладкого отображения с большим числом многообразий переключения с мультистабильной динамикой. Это отображение является дискретной моделью однополярной широтно-импульсной системы управления энергообеспечением печи для выращивания кристаллов искусственного сапфира.

Показано, что отображение демонстрирует особый тип мультистабильного поведения, когда в фазовом пространстве сосуществуют несколько вложенных друг в друга замкнутых инвариантных кривых, соответствующих двухчастотным колебаниям.

Исследованы механизмы рождения и исчезновения сосуществующих замкнутых инвариантных кривых через суперкритическую бифуркацию Неймарка — Сакера, последовательность бифуркаций граничного столкновения и квазипериодической седло-узловой бифуркации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feudel U., Grebogi C., Hunt B. R., Yorke J. A.* Map with More than 100 Coexisting Low-Period Periodic Attractors // Phys. Rev. E 54. 1996. P. 71—81.

2. *Feudel U.* Complex Dynamics in Multistable Systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 1607—1626.

3. *Feudel U., Pisarchik A., Showalter K.* Multistability and Tipping: From Mathematics and Physics to Climate and Brain — Minireview and preface to the focus issue // Chaos. 2018. Vol. 28. P. 033501.

4. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Yahochkina O. O.* Torus Bifurcations in Multilevel Converter Systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21. P. 2343—2356.

5. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Pavlova E.V.* Multistability and Torus Reconstruction in a DC-DC Converter with Multilevel Control // IEEE Trans. on Industrial Informatics. 2013. Vol. 9. P. 1936—1946.

6. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Multistability and Hidden Attractors in a Multilevel DC/DC Converter // Math. Comput. Simul. 2015. Vol. 109. P. 32—45.

7. *Avrutim V., Zhusubaliyev Zh. T.* Nested Closed Invariant Curvesin Piecewise Smooth Maps // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2019. Vol. 29, N. 7. P. 193001721.

8. *Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Gardini L., Sushko I.* Border Collision Bifurcation of a Resonant Closed Invariant Curve // Chaos. 2022. Vol. 32. P. 043101.

9. *Feigin M. I.* Doubling of the Oscillation Period with C-Bifurcations in Piecewise Continuous Systems // PMM J. Appl. Math. Mech. 1970. Vol. 34. P. 861—869.

10. *Nusse H. E., Yorke J. A.* Border-Collision Bifurcations Including „Period Two to Period Three“ Bifurcation for Piecewise Smooth Systems // Physica D. 1992. Vol. 57. P. 39—57.

11. Nonlinear Phenomena in Power Electronics / Ed.: *S. Banerjee, G. C. Verghese.* N. Y.: IEEE Press, 2001. 645 p.

12. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. World Scientific, 2003. 363 p.

13. *Di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P.* Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. Springer, 2008. 483 p.

14. *Жусубалиев Ж. Т., Рубанов В. Г., Гольцов Ю. А., Яночкина О. О., Поляков С. А.* Квазипериодичность в системе управления температурным полем нагревательной установки // Научные ведомости БелГУ. Серия Экономика. Информатика. 2017. № 23(272), вып. 44. С. 113—122.

15. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Hidden Attractors in Dynamical Systems. From Hidden Oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman Problems to Hidden Chaotic Attractor in Chua Circuit // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2013. Vol. 23, N 1. P. 1330002.

16. *Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Prasad A*. Hidden Attractors in Dynamical Systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. P. 1—50.

17. *Кузнецов Н. В.* Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. Т. 59, № 5. С. 5—27.

18. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Churilov A. N., Medvedev A.* Multistability and Hidden Attractors in an Impulsive Goodwin Oscillator with Time Delay // The European Physical Journal. Special Topics. 2015. Vol. 224, N 8. P. 1519—1539.

19. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Rubanov V. G., Nabokov R. A.* Multistability and Hidden Attractors in a Relay System with Hysteresis // Physica D. 2015. Vol. 306. P. 6—15.

20. *Parker T. S., Chua L. O.* Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. N. Y.: Springer Verlag, 1989. 348 p.

21. *Nusse H. E., Yorke J. A.* A Procedure for Finding Numerical Trajectories in Chaotic Saddles // Physica D. 1989. Vol. 36, N 1—2. P. 137—156.

22. *You Z., Kostelich E. J., Yorke J. A.* Calculating Stable and Unstable Manifolds // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1991. Vol. 01, N 03. P. 605—623.

23. *England J. P., Krauskopf B., Osinga H. M.* Computing One-Dimensional Stable Manifolds and Stable Sets of Planar Maps Without the Inverse // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2004. Vol. 3, N 2. P. 161—190.

24. *Krauskopf B., Osinga H. M., Doedel E. J., Henderson M. E., Guckenheimer J., Vladimirsky A., Dellnitz M., Junge O.* A survey of Methods for Computing (Un)stable manifolds of Vector Fields // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, N. 03. P. 763—791.

25. *Fundinger D.* Toward the Calculation of Higher-Dimensional Stable Manifolds and Stable Sets for Noninvertible and Piecewise-Smooth Maps // Journal Nonlinear Sci. 2008. Vol. 18. P. 391—413.

26. *Li. H., Fan Y., Zhang J.* A New Algorithm for Computing One-Dimensional Stable and Unstable Manifolds of Maps // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22, N 01. P. 1250018.

27. *Guckenheimer J., Krauskopf B., Osinga H. M., Sandstede B.* Invariant Manifolds and Global Bifurcations // Chaos. 2015. Vol. 25, N 9. P. 097604.

28. *Yue X-L., Xu Y., Xu W., Sun J-Q.* Global Invariant Manifolds of Dynamical Systems with the Compatible Cell Mapping Method // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2019. Vol. 29, N 8. P. 1950105.

29. *Жусубалиев Ж. Т., Рубанов В. Г., Гольцов Ю. А.* К расчету инвариантных многообразий кусочно-гладких отображений // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. 2020. № 24(3). С. 166—182.

30. *Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E.* Numerical Bifurcation Analysis of Maps: From Theory to Software. Cambridge Univ. Press, 2019. 753p.

Сведения об авторах

Жаныбай Турсунбаевич Жусубалиев — д-р техн. наук, профессор; Юго-Западный государственный университет, кафедра вычислительной техники, Международная научная лаборатория динамики негладких систем; E-mail: zhanybai@gmail.com

Айтибек Закирович Абдирасулов — Ошский государственный университет, IT академия; директор; E-mail: aitibek.osh@gmail.com

Уланбек Адахимжанович Сопуев — канд. физ.-мат. наук, доцент; Ошский государственный университет, факультет математики и информационных технологий; декан; E-mail: ulansopuev@mail.ru

Елена Александровна Коломиец — канд. техн. наук; Юго-Западный государственный университет, кафедра вычислительной техники, Международная научная лаборатория динамики негладких систем; ст. преподаватель; E-mail: lenus07@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.11.2023; одобрена после рецензирования 05.12.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 54, pp. 71–81.
2. Feudel U. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, pp. 1607–1626.
3. Feudel U., Pisarchik A., Showalter K. *Chaos*, 2018, vol. 28, pp. 033501.
4. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Yahochkina O.O. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2011, vol. 21, pp. 2343–2356.
5. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Pavlova E.V. *IEEE Trans. on Industrial Informatics*, 2013, vol. 9, pp. 1936–1946.
6. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. *Math. Comput. Simul*., 2015, vol. 109, pp. 32–45.
7. Avrutim V., Zhusubaliyev Zh.T. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2019, no. 7(29), pp. 193001721.
8. Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Gardini L., Sushko I. *Chaos*, 2022, vol. 32, pp. 043101.
9. Feigin M.I. *PMM J. Appl. Math. Mech*., 1970, vol. 34, pp. 861–869.
10. Nusse H.E., Yorke J.A. *Physica D*, 1992, vol. 57, pp. 39–57.
11. Banerjee S., Verghese G.C., eds., *Nonlinear Phenomena in Power Electronics,* IEEE Press, NY, 2001, 645 p.
12. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems,* World Scientific, 2003, 363 p.
13. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Springer, 2008, 483 p.
14. Zhusubaliyev Zh.T., Rubanov V.G., Gol'tsov Yu.A., Yanochkina O.O., Polyakov S.A. *Belgorod State University Scientific Bulletin Economics. Information Technologies*, 2017, no. 23(272), pp. 113–122. (in Russ.)
15. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2013, no. 1(23), pp. 1330002.
16. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. *Physics Reports*, 2016, vol. 637, pp. 1–50.
17. Kuznetsov N.V. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, no. 5(59), pp. 647–668.
18. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Churilov A.N., Medvedev A. *The European Physical Journal. Special Topics*, 2015, no. 8(224), pp. 1519–1539.
19. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Rubanov V.G., Nabokov R.A. *Physica D*, 2015, vol. 306, pp. 6–15.
20. Parker T.S., Chua L.O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, NY, Springer-Verlag, 1989, 348 p.
21. Nusse H.E., Yorke J.A. *Physica D*, 1989, no. 1-2(36), pp. 137–156.
22. You Z., Kostelich E.J., Yorke J.A. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 1991, no. 03 (01), pp. 605–623.
23. England J.P., Krauskopf B., Osinga H.M. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst*., 2004, no. 2(3), pp. 161–190.
24. Krauskopf B., Osinga H.M., Doedel E.J., Henderson M.E., Guckenheimer J., Vladimirsky A., Dellnitz M., Junge O. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2005, no. 03(15), pp. 763–791.

25. Fundinger D. *J. Nonlinear Sci.*, 2008, vol. 18, pp. 391–413.
26. Li H., Fan Y., Zhang J. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2012, no. 01(22), pp. 1250018.
27. Guckenheimer J., Krauskopf B., Osinga H.M., Sandstede B. *Chaos*, 2015, no. 9(25), pp. 097604.
28. Yue X.-L., Xu Y., Xu W., Sun J.-Q. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2019, no. 8(29), pp. 1950105.
29. Zhusubaliyev Zh.T., Kuzmina D.S., Yanochkina O.O. *Proceedings of the Soutwest State University*, 2020, no. 3(24), pp. 166–182. (in Russ.)
30. Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E. *Numerical Bifurcation Analysis of Maps: from Theory to Software*, Cambridge University Press, 2019, 753 p.

Data on authors

Zhanybai T. Zhusubaliyev — Dr. Sci., Professor; Southwest State University, Department of Computer Science, International Scientific Laboratory for Dynamics of Non-Smooth Systems; E-mail: zhanybai@gmail.com

Aitibek Z. Abdirasulov — Osh State University, IT Academy; Director; E-mail: aitibek.osh@gmail.com

Ulanbek A. Sopuev — PhD, Associate Professor; Osh State University, Faculty of Mathematics and Information Technology; Dean; E-mail: ulansopuev@mail.ru

Elena A. Kolomiets — PhD; Southwest State University, Department of Computer Science, International Scientific Laboratory for Dynamics of Non-Smooth Systems; Senior Lecturer; E-mail: lenus07@yandex.ru

Received 27.11.2023; approved after reviewing 05.12.2023; accepted for publication 14.01.2024.

УДК 681.51
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-230-240

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Ф. Шишлаков, В. И. Гончарова*

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия
**goncharova_31kaf@bk.ru*

Аннотация. Рассматривается задача параметрического синтеза законов управления непрерывными системами автоматического управления с распределенным параметрами. В качестве математического аппарата для решения задачи применяется метод разделения переменных для реализации перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с целью распространения обобщенного метода Галеркина на новый класс систем с распределенными параметрами.

Ключевые слова: *системы автоматического управления с распределенными параметрами, обобщенный метод Галеркина, метод разделения переменных (Фурье), дифференциальные уравнения в частных производных*

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003, „Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга“.

Ссылка для цитирования: *Шишлаков В. Ф., Гончарова В. И.* Параметрический синтез линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 230—240. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-230-240.

PARAMETRIC SYNTHESIS OF LINEAR AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

V. F. Shishlakov, V. I. Goncharova*

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia
**goncharova_31kaf@bk.ru*

Abstract. The problem of parametric synthesis of control laws for continuous automatic control systems with distributed parameters is considered. As a mathematical apparatus for solving the problem, the method of separation of variables (Fourier) is used to implement the transition from partial differential equations to ordinary differential equations, in order to extend the generalized Galerkin method to a new class of systems with distributed parameters.

Keywords: automatic control systems with distributed parameters, generalized Galerkin method, method of separation of variables (Fourier), partial differential equations

Acknowledgements: the work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. FSRF-2023-0003, “Fundamental principles for the construction of noise-resistant systems for space and satellite communications, relative navigation, technical vision and aerospace monitoring”.

For citation: Shishlakov V. F., Goncharova V. I. Parametric synthesis of linear automatic control systems with distributed parameters. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 230—240 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-230-240.

© Шишлаков В. Ф., Гончарова В. И., 2024

Синтез параметров систем автоматического управления (САУ) сложными техническими объектами является актуальной инженерно-технической задачей, что обусловлено прогрессивным развитием электромеханических, электроэнергетических, а также робототехнических киберфизических систем, проектируемых и внедряемых в разных областях науки и техники [1, 2].

Поскольку речь идет о системах с распределенными параметрами, задача их реализации, в отличие от реализации систем с сосредоточенными параметрами, имеет ряд особенностей, связанных с построением математической модели. Главная особенность задачи реализации САУ с распределенными параметрами — учет пространственной протяженности управляемого объекта, что влечет за собой описание не только во времени, но и в пространстве. Следствием особенности описания объекта можно считать тот факт, что САУ с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных (далее — ДУ ЧП), интегральными, а также интегродифференциальными уравнениями, что приводит к трудностям в расчетах и построении математической модели объекта.

Наиболее распространенным методом синтеза САУ является обобщенный метод Галеркина [3—7]. Однако указанный метод не позволяет решить задачу синтеза САУ, используя уравнения в частных производных. С целью упрощения обобщенного метода Галеркина и распространения его на системы с распределенными параметрами рассмотрим классический пример перехода от ДУ ЧП к обыкновенным дифференциальным уравнениям и использование данного метода [5—11] в уравнении перехода.

Для решения поставленной задачи рассмотрим процедуру синтеза системы управления объектом с распределенными параметрами с обратной связью на примере процесса нагрева стержня в печи. В отличие от систем с сосредоточенными параметрами, где используются обыкновенные дифференциальные уравнения, в системах с распределенными параметрами задача осложняется учетом нескольких переменных в пространстве состояний, что связано с рядом сложностей и, как следствие, с недостаточной изученностью данного класса систем, а также с отсутствием эффективного математического аппарата для своевременного принятия решения.

Поскольку исследуется непрерывная система, содержащая обратную связь, необходимо и достаточно рассмотреть управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи [12]. Используя данные из работы [12], выполним переход от ДУ ЧП к обыкновенным дифференциальным уравнениям [13]. Для этого необходимо в двумерной области $D = \{(x,t) | a \le x \le b, t \ge 0\}$ решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}U - K(x,t)\frac{d^2}{dx^2}U - K(x,t)\left(\frac{d}{dx}U\right) - \beta(x,t)U = g(x,t)$$

с учетом краевых условий

$$\left.\begin{aligned} a_0 u(a,t) + a_1 \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b,t) + b_1 \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = b_2(t) \end{aligned}\right\}$$

и начального условия

$$u(x,0) = f(x).$$

В случае если значения функций K, β, g, a_2, b_2 не зависят от времени t, необходимо задать $K(x)$, $K>0$, $\beta(x)$, $g(x)$, $f(x)$ и численные значения параметров a, b, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4:

$$c_1 = 0{,}1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1,\ c_4 = 1;$$
$$K(x) = c_1,\ \beta(x) = 0,\ g(x) = 0;$$

$$a=0,\ b=2, a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=c_2,\ b_0=1,\ b_1=0,\ b_2=c_3,$$

$$f(x)=c_4x^2+\frac{c_3-c_2-c_4b^2}{b}x+c_2.$$

Таким образом,

$$f(x)=x^2-\frac{\pi^2-1}{\pi}+1.$$

Для наглядности введем момент времени, в течение которого необходимо провести исследование: T=1 с.

Далее необходимо получить точное решение $U(x, t)$ с помощью разложения функции в ряд Фурье. При условии, что $\beta(x)=0$, $\psi(x)=0$, $K(x)=c_1$=const, используем метод разделения переменных [14]:

$$U(x,t)=Q(x,t)+f(t)+\psi(t);$$

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2Q}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=K^2\frac{\partial Q}{\partial t}+f'(t)+\psi'(t). \qquad (1)$$

Изменим уравнение (1), сделав его неоднородным:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=K^2\frac{\partial Q}{\partial x^2}-f'(t)-\psi'(t),$$

причем

$$Q(a_2,t)=0,\ f(b_2,t)=0,$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} &U(0,t)=0+0+\psi(t)=\alpha(t);\\ &U(b_2,t)=0+f(t)b_2+\psi(t)=\beta(t),\\ &f(t)=\frac{\beta(t)-\alpha(t)}{b_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом, однородное уравнение представим в виде неоднородного, при этом для Q изменим граничные условия:

$$U(x,0)=f_0(x)=Q(x,0)+f(0)x+\psi(0)=Q(x,0)+\frac{\beta(0)-\alpha(0)}{b_2}x+\alpha(0),$$

т.е. начальные условия для функции Q примут следующий вид:

$$Q(x,0)=f_0(x)+\frac{\beta(0)-\alpha(0)}{b_2}x-\alpha(0), \qquad (3)$$

$$Q(a_2,t)=0,\ \mathrm{Q}(b_2,t)=0.$$

Далее получим уравнение

$$Q(x,t)=U(x,t)+V(x,t),$$

разделив правую часть которого и граничные условия (3) на разные функции, получим два уравнения, являющиеся решением одного и того же уравнения, т.е. получим однородное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t}=K^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$$

и неоднородное уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - f'(t)x - \psi'(t).$$

После подстановки в последнее системы (2) имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t),$$

при этом

$$U(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x + \alpha(0),\ V(x,0) = 0.$$

В результате получим

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial (U+V)}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t) =$$

$$= K^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{b_2} x - \alpha'(t),$$

причем

$$Q(x,0) = U(x,0) + V(x,0) = f_0(x) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{b_2} x - \alpha(0)$$

с учетом нулевых граничных условий $U(a_2,t) = 0,\ U(b_2,t) = 0,\ V(a_2,t) = 0,\ V(b_2,t) = 0.$

Согласно начальным условиям

$$U(a_2,t) = A(0)B(t) = 0;\ U(b_2,t) = A(x)B(t) = 0, \tag{4}$$

функция $B(t)$ не может быть равна нулю, тогда U всегда будет равно нулю. Таким образом, получим

$$A(a_2)=0,\ A(b_2)=0.$$

Далее разделим функции (4) на две части:

$$U(x,t) = A(x)B(t);\quad A(x)B'(t) = K^2 A''(x)B(t);$$

$$\frac{B'(t)}{K^2 B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = M,\quad A''(x) - MA(x) = 0.$$

Поскольку экспонента не может быть линейной, то

$$A_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{b_2}\right),$$

где $M = -\left(\frac{\pi k}{b_2}\right)^2$, так как $\sqrt{-M} = \frac{\pi k}{b_2}$, причем $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, k не может быть равно нулю и не может быть отрицательным, так как $\sqrt{-M}$ положительный. Поскольку

$$B_k' = MK^2\beta(t) - \left(\frac{\pi k K}{b_2}\right)^2 B_k(t);\quad B_k = \exp\left\{-\left(\frac{\pi k K}{b_2}\right)^2 t\right\},$$

то соответственно

$$U_k(x,t) = \exp\left\{-\left(\frac{\pi k K}{a_2 - b_2}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{\pi k x}{a_2 - b_2}\right).$$

Так как данное уравнение линейное, то решение существует; умножая уравнение на любой числовой множитель и суммируя с другим таким же решением, получаем

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\exp\left\{-\left(\frac{\pi k c_1}{a_2-b_2}\right)^2 t\right\}\sin\left(\frac{\pi k x}{a_2-b_2}\right).$$

Поскольку начальное значение $U(x,0)=f_0(x)-\dfrac{\beta(0)-\alpha(0)}{b_2}x+\alpha(0),$ то

$$U(x,t)=U_0(x,t)+\sum_{k=1}^{M}A_k\exp\left\{-c_1 t\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}\right\}\sin\left(\frac{k\pi x}{b-a}\right).$$

Далее необходимо задать количество слагаемых, при которых точность решения в относительных единицах будет иметь большее приближение; так, при M=3 с точностью до 0,001 зададим значение, превышающее данный параметр, например M=30. При a_1=0, b_1=0 функцию $U_0(x, t)$ можно представить в виде

$$U_0(x)=\frac{b_0a_2b-b_2a_0a}{a_0b_0(b-a)}+\frac{(b_2a_0-b_0a_2)x}{a_0b_0(b-a)},\quad U_0(x)=1.$$

Вычислим значения коэффициентов $A_k,\ k=\overline{1,M}$:

$$A_{2\,i-1}=\frac{2}{b-a}\int_a^b\left(f(x)-U_0(x)\right)\sin\left(\frac{\pi i x}{b-a}\right)dx,\quad i=\overline{1,M},$$

$$f(x)-U_0(x)=x^2-\frac{x}{2}-\frac{x(\pi^2-1)}{\pi}.$$

В этом случае получим точное решение $U(x, t)$ вида

$$U_T(x,t)=U_0(x)+\sum_{k=1}^{M}\left[A_{2\,k-1}\exp\left\{-c_1 t\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}\right\}\sin\left(\frac{k\pi x}{b-a}\right)\right].$$

Определим матрицу U_1 точного решения, разделяя отрезок $[a,b]$ на десять частей при t, равном 0; 0,1 T; 0,2T; ..., T:

$$U_{1\,i,j}=U_T\left[a+(b-a)\frac{i}{10},\frac{jT}{10}\right];\ i=\overline{0,10},\quad j=\overline{0,10},$$

тогда

$$U_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0{,}64 & 0{,}674 & 0{,}698 & 0{,}717 & 0{,}733\\ 0{,}36 & 0{,}4 & 0{,}435 & 0{,}467 & 0{,}496\\ 0{,}16 & 0{,}2 & 0{,}239 & 0{,}277 & 0{,}313\\ 0{,}04 & 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}159 & 0{,}198\\ -1{,}899\cdot10^{-5} & 0{,}04 & 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}159\\ 0{,}04 & 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}159 & 0{,}198\\ 0{,}16 & 0{,}2 & 0{,}239 & 0{,}277 & 0{,}313\\ 0{,}36 & 0{,}4 & 0{,}435 & 0{,}467 & 0{,}496\\ 0{,}64 & 0{,}674 & 0{,}698 & 0{,}717 & 0{,}733\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Введем переменную n=2, которая представляет собой количество решений. Получим график точного решения (рис. 1) при $t=T$.

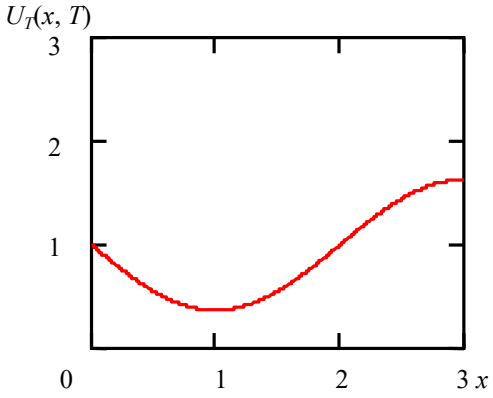


Рис. 1

Далее необходимо получить приближенное решение. Будем использовать приближенные функции

$$V_0(k,x)=(x-a)^k(x-b), \quad k=\overline{1,n},$$

которые необходимо нормировать при

$$VV_{i-1}=\sqrt{\int_a^b\left(V_0(i,x)\right)^2dx}, \quad i=\overline{1,n},$$

после чего получаем нормированные приближенные решения:

$$V(k,x)=\text{если}\left[k\neq 0,\frac{V_0(k,x)}{VV_{k-1}},\frac{b_0a_2b-b_2a_0a}{a_0b_0(b-a)}+\frac{b_2a_0-b_0a_2}{a_0b_0(b-a)}\right],$$

$$V(0,x)=1.$$

Определим значения двух первых производных нормированного приближенного решения:

$$V_1(k,x)=\text{если}\left[k\neq 0,\frac{(x-a)^k+(x-b)k(x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}},\frac{b_2a_0-b_0-a_2}{a_0b_0(b-a)}\right],$$

$$V_2(k,x)=\text{если}\left[k\neq 0,\frac{2k(x-a)^k+(x-b)k(x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}},0\right].$$

Далее введем систему приближенных функций

$$W(k,x)=V(k,x).$$

Для получения передаточной функции объекта управления с распределенными параметрами введем в рассмотрение матрицы, элементы которых являются коэффициентами системы ДУ:

$$A\left(\frac{d}{dt}H\right)=CH+B.$$

Для нахождения функций $H_k(t)$ с начальными условиями $AH(0)=D_1$ при $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ можно записать:

$$B_{i-1}=\int_a^b\left(K(x)V_2(x,0)+\frac{d}{dx}K(x)V_1(0,x)+\beta(0)V(0,x)+g(x)\right)W(i,x)dx;$$

$$A_{i-1,j-1} = \int_a^b V(j,x)W(i,x)dx;$$

$$C_{i-1,j-1} = \int_a^b \left[K(x)\frac{d^2}{dx^2}V(j,x) + \left(\frac{d}{dx}K(x)\right)\left(\frac{d}{dx}V(j,x)\right) + \beta(x)V(j,x)dx \right] W(i,x)dx,$$

$$D_{1\,i-1} = \int_a^b (f(x) - V(0,x))W(i,x)dx.$$

Зададим матричную систему дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{d}{dt}H = A_1 H + B_1,$$

$$A_1 = A^{-1}C$$

с учетом начальных условий

$$H(0) = D_2; \quad B_1 = A^{-1}B, \quad D_2 = A^{-1}D_1.$$

Таким образом, получено решение системы дифференциальных уравнений

$$H=D_2;$$

$$D(t, H)=A_1+B_1,$$

$$Y_{n,k} = \begin{pmatrix} H_1(T) \\ H_2(T) \\ \dots \\ H_n(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,454 \\ 1,504 \\ -2,198 \\ 1,751 \\ -0,665 \end{pmatrix}.$$

Решение имеет следующий вид:

$$U(x, 1) = U_0(x) + 2{,}454U_1(x)\cdot 1{,}504U_2(x) - 2{,}198U_3(x)\cdot 1{,}751U_4(x) - 0{,}665U_5(x),$$

а приближенное решение — вид

$$U(x) = V(0,x) + \sum_{k=1}^{n}\left(V(k,x)Y_{n,k}\right).$$

На рис. 2, *а* представлены полученные графики приближенного $U(x)$ и точного $U_T(x, T)$ решений (кривые *1* и *2* соответственно) при n=2.

Для наглядности на рис. 2, *б* показан аналогичный график при n=3.

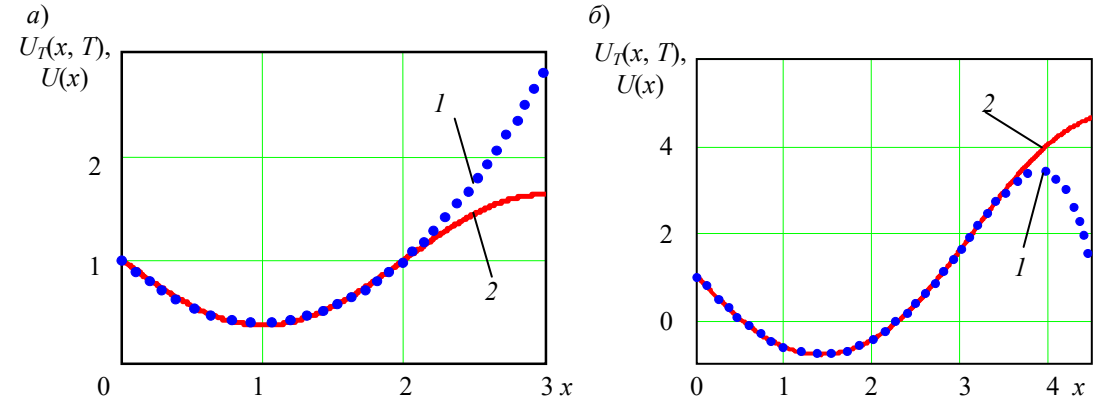


Рис. 2

Как видно из графиков, при заданном количестве решений приближенное и точное решения совпадают, что является необходимым при реализации перехода от ДУ ЧП к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Размерность матрицы A и точность вычисления приближенного решения задаются параметром n.

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, используем полученные матрицы пространства состояний A, B, C для нахождения передаточной функции системы автоматического управления с распределенными параметрами:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}935 \\ 0{,}935 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} -0{,}101 & -0{,}095 \end{bmatrix}.$$

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами

$$W_{\text{р.п}}(p)=C\left(pI-A\right)^{-1}B=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{b_1c_1p+b_2c_2p+b_1c_1a_4+c_2a_3b_1+b_2c_1a_2-b_2c_2a_1}{p^2-a_1p-a_4p+a_1a_4-a_2a_3}.$$

Таким образом, передаточная функция звена с распределенными параметрами

$$W_{\text{р.п}}(p)=\frac{-0{,}095p-0{,}1894}{p^2-2p+1{,}8742}.$$

В задаче синтеза параметров технических систем обобщенным методом Галеркина предполагается, что структура и параметры синтезируемой САУ известны. Структура регулятора САУ задается в общем виде и определяется из условия приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы в переходном режиме ($T_{\text{п.п}}$ — время переходного процесса, σ — перерегулирование, μ — колебательность). Устойчивость и грубость САУ определяются варьируемыми параметрами системы.

Используя схему САУ из работы [7], внесем изменения в объект управления. Объектом управления будем считать стержень, нагреваемый в печи. Структурная схема, моделирующая непрерывную систему автоматического управления процессом нагрева стержня в печи, представлена на рис. 3.

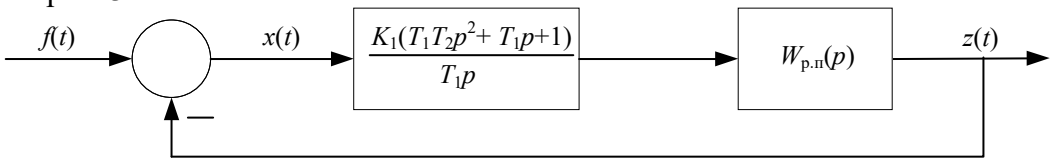


Рис. 3

САУ, состоящая из ПИД-регулятора объекта управления, описывается относительно координаты выхода следующим ДУ:

$$T_1p\left(p^2-a_1p+a_4p+a_1a_4-a_2a_3\right)z(t)+$$

$$+(K_1T_1T_2p^2+K_1T_1p+K_1)\left(b_1c_1p+b_2c_2p+b_1c_1c_4+c_2a_3b_1+b_2c_1a_2-b_2c_2a_1\right)z(t)=$$

$$=(K_1T_1T_2p^2+K_1T_1p+K_1)\left(b_1c_1p+b_2c_2p+b_1c_1c_4+c_2a_3b_1+b_2c_1a_2-b_2c_2a_1\right)f(t)=$$

$$=0{,}01(K_1T_1T_2p^2+K_1T_1p+K_1)f(t).$$

Уравнение движения, описывающее динамику представленной системы управления, имеет следующий вид:

$$Q\left(c_k,D\right)x(t)+\overline{f}(p)x(t)=S\left(c_k,D\right)f(t),$$

где $x(t)$ — координата выхода системы с распределенными параметрами; $f(t)$ — сигнал на входе системы управления; c_k — варьируемые параметры; $\overline{f}(p)=\dfrac{\varphi(p)}{\psi(p)}=\dfrac{a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots}{b_1p+b_2p^2+\ldots}$ —

обобщенные полиномы САУ с распределенными параметрами [15]; $Q(c_k, D), S(c_k, D)$ — полиномы оператора обобщенного дифференцирования D.

В ходе решения поставленной задачи параметрического синтеза необходимо определить положительные значения варьируемых параметров, которые будут обеспечивать в системе перерегулирование на уровне $\sigma \le 16$ % при $f(t)=1(t)$ переходном процессе и времени затухания $T_{\text{п.п}} \le 10$ с с сохранением устойчивости.

Исходя из заданных показателей качества работы системы в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [7], были определены параметры желаемого программного движения:

$$x^0(t) = x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0),$$

где $x_y = 1$; $H_1 = 1{,}105$; $\alpha = 10$; $\beta = 21$ рад/с; $\varphi_0 = 0{,}454$ рад.

Графики переходных процессов системы представлены на рис. 4, где кривая *1* соответствует желаемому программному движению, кривая *2* — полученному переходному процессу.

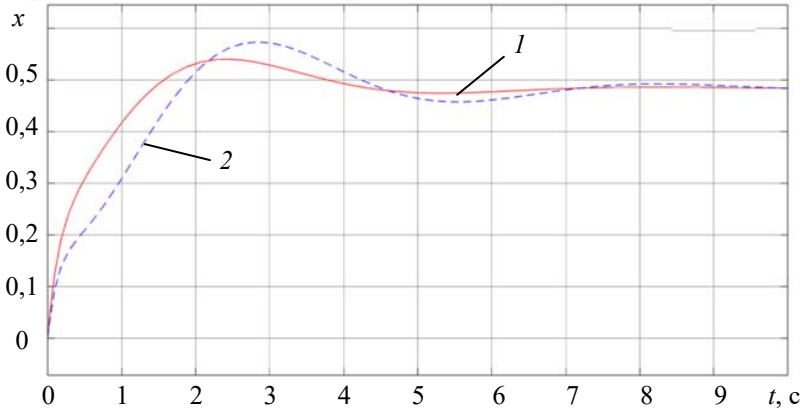


Рис. 4

В результате решения поставленной задачи синтеза обобщенным методом Галеркина были получены следующие значения варьируемых параметров ПИД-регулятора: T_1 =0,51 с, T_2 =0,12 с, K_1 =0,244. Полученный график переходного процесса показывает, что найденные параметры приближенно обеспечивают заданные показатели качества работы САУ в переходном режиме.

Таким образом, выполнена задача распространения обобщенного метода Галеркина на новый класс систем с распределенными параметрами. Используя указанный метод реализации перехода от ДУ ЧП к обыкновенным дифференциальным уравнениям, можно значительно упростить процесс решения задачи параметрического синтеза САУ с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bobtsov A., Pyrkin A., Vedyakov A., Vediakova A., Aranovskiy S.* A Modification of Generalized Parameter-Based Adaptive Observer for Linear Systems with Relaxed Excitation Conditions // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55, N 1. P. 324—329.

2. *Bezzubov V., Bobtsov A., Efimov D., Ortega R., Nikolaev N. A.* Adaptive state observation of linear time-varying systems with delayed measurements and unknown parameters // Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control. 2023. Vol. 33, N 2. P. 1203—1213.

3. *Vorontsova V. L., Gorskaya T. Y.* On application of Bubnov — Galerkin method of the solution of differential equations // Intern. Journal of Applied Engineering Research. 2015. N 10(24). P. 44715—44723.

4. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. *А. А. Воронова* и *И. А. Орурка*. М.: Наука, 1984. 340 с.

5. Алгоритмы динамического синтеза нелинейных автоматических систем / Под ред. *А. А. Воронова* и *И. А. Орурка*. СПб: Энергоатомиздат, 1992. 334 с.

6. *Шишлаков В. Ф.* Синтез нелинейных САУ с различными видами модуляции: Монография. СПб: СПбГУАП, 1999. 268 с.

7. *Никитин А. В., Шишлаков В. Ф.* Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления : Монография / Под ред. *В. Ф. Шишлакова.* СПб: СПбГУАП, 2003. 358 с.

8. *Шишлаков В. Ф.* Синтез нелинейных импульсных систем управления во временной области // Изв. вузов. Приборостроение. 2003. Т. 46, № 12. С. 25—30.

9. *Никитин А. В., Шишлаков В. Ф.* Параметрический синтез системы автоматического управления торможением колес транспортного средства // Изв. вузов. Приборостроение. 2004. Т. 47, № 5. С. 24—29.

10. *Шишлаков В. Ф., Грибков В. Н.* Синтез дискретных САУ с запаздыванием методом ортогональных проекций // Методы исследований и проектирования автоматических систем и приборов: Сб. Л.: ЛИАП, 1990. С. 35—41.

11. *Шишлаков В. Ф.* Синтез нелинейных САУ с запаздыванием прямым вариационным методом // Методы и средства обработки и получения данных в информационно-управляющих системах: Сб. Л.: ЛИАП, 1990. С. 30—37.

12. *Айда-Заде К. Р., Абдуллаев В. М.* Управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи // Автоматика и телемеханика. 2022. № 1. С. 130—149.

13. Решение линейных задач математической физики на основе методов взвешенных невязок: Учеб. пособие / *А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. С. Семенов*; Под общ. ред. *П. А. Вельмисова*. Ульяновск: УлГТУ, 2010. 179 с.

14. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.

15. *Дилигенская А. Н.*, *Днилушкин И. А.* Математическое моделирование систем с распределенными параметрами: Учеб. пособие. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2012. 65 с.

Сведения об авторах

Владислав Федорович Шишлаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра управления в технических системах; E-mail: svfmail@yandex.ru

Виктория Игоревна Гончарова — Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра управления в технических системах; ст. преподаватель; E-mail: goncharova_31kaf@bk.ru

Поступила в редакцию 12.11.2023; одобрена после рецензирования 21.11.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. Bobtsov A., Pyrkin A., Vedyakov A., Vediakova A., Aranovskiy S. *IFAC-PapersOnLine, 2022*, no. 1(55), pp. 324–329.
2. Bezzubov V., Bobtsov A., Efimov D., Ortega R., Nikolaev N.A. *Intern. J. of Robust and Nonlinear Control*, 2023, no. 2(33), pp. 1203–1213.
3. Vorontsova V.L., Gorskaya T.Y. *Intern. J. of Applied Engineering Research*, 2015, no. 10(24), pp. 44715–44723.
4. Voronov A.A., Orurk I.A., eds., *Analiz i optimal'nyy sintez na EVM sistem upravleniya* (Analysis and Optimal Synthesis on a Computer of Control Systems), Moscow, 1984, 340 p. (in Russ.)
5. Voronov A.A., Orurk I.A., eds., *Algoritmy dinamicheskogo sinteza nelineynykh avtomaticheskikh sistem* (Algorithms for Dynamic Synthesis of Nonlinear Automatic Systems), St. Petersburg, 1992, 334 p. (in Russ.)
6. Shishlakov V. F. *Sintez nelineynykh SAU s razlichnymi vidami modulyatsii* (Synthesis of Nonlinear Automatic Control Systems with Various Types of Modulation), St. Petersburg, 1999, 268 p. (in Russ.)
7. Nikitin A.V., Shishlakov V.F. *Parametricheskiy sintez nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Parametric Synthesis of Nonlinear Automatic Control Systems), St. Petersburg, 2003, 358 p. (in Russ.)
8. Shishlakov V.F. *Journal of Instrument Engineering*, 2003, no. 12, pp. 25–30. (in Russ.)
9. Nikitin A.V., Shishlakov V.F. *Journal of Instrument Engineering*, 2004, no. 5, pp. 24–29. (in Russ.)
10. Shishlakov V.F., Gribkov V.N. *Metody issledovaniy i proyektirovaniya avtomaticheskikh sistem i priborov* (Methods of Research and Design of Automatic Systems and Devices), Leningrad, 1990, pp. 35–41. (in Russ.)
11. Shishlakov V.F. *Metody i sredstva obrabotki i polucheniya dannykh v informatsionno-upravlyayushchikh sistemakh* (Methods and Means of Processing and Obtaining Data in Information Management Systems), Leningrad, 1990, pp. 30–37. (in Russ.)
12. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. *Automation and Remote Control*, 2022, no. 1, pp. 106–122.
13. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Semenov A.S. *Resheniye lineynykh zadach matematicheskoy fiziki na osnove metodov vzveshennykh nevyazok* (Solving Linear Problems of Mathematical Physics Based on Weighted Residual Methods), Ulyanovsk, 2010, 179 p. (in Russ.)

14. Fletcher C.A.J. *Computational Galerkin methods*, NY, Springer-Verlag, 1984.
15. Diligenskaya A.N., Dnilushkin I.A. *Matematicheskoye modelirovaniye sistem s raspredelennymi parametrami* (Mathematical Modeling of Systems with Distributed Parameters), Samara, 2012, 65 p. (in Russ.)

Data on authors

Vladislav F. Shishlakov — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Control in Technical Systems; E-mail: svfmail@yandex.ru

Victoria I. Goncharova — St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Control in Technical Systems; Senior Lecturer;
E-mail: goncharova_31kaf@bk.ru

Received 12.11.2023; approved after reviewing 21.11.2023; accepted for publication 14.01.2024.

УДК 681.5.015
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-241-250

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ГЛУБИНЫ ПОГРУЖЕНИЯ ПОДВОДНОГО АППАРАТА НА БАЗЕ ПРОЦЕДУРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ И СМЕШИВАНИЯ РЕГРЕССОРА

А. И. Глущенко*, К. А. Ласточкин

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия
**aiglush@ipu.ru*

Аннотация. Представлено решение задачи оценивания параметров динамической модели глубины погружения необитаемого подводного аппарата. Для решения задачи предложен новый закон идентификации, основанный на процедуре динамического расширения и смешивания регрессора и алгоритме усреднения оценок неизвестных параметров. Полученная модель с идентифицированными параметрами с достаточной точностью аппроксимирует динамику глубины погружения реального аппарата и подходит для дальнейшего расчета на ее основе робастных типовых регуляторов.

Ключевые слова: *идентификация, динамическое расширение регрессора, усреднение оценок, необитаемый подводный аппарат, возбуждение регрессора, управление*

Благодарности: работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД-1787.2022.4).

Ссылка для цитирования: *Глущенко А. И., Ласточкин К. А.* Идентификация параметров модели глубины погружения подводного аппарата на базе процедуры динамического расширения и смешивания регрессора // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 241—250. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-241-250.

PARAMETERS IDENTIFICATION FOR UNDERWATER VEHICLE DIVING DEPTH MODEL BASED ON THE REGRESSOR DYNAMIC EXPANSION AND MIXING PROCEDURE

A. I. Glushchenko*, K. A. Lastochkin

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the RAS, Moscow, Russia
**aiglush@ipu.ru*

Abstract. A solution to the problem of estimating the parameters of a dynamic model of the diving depth of an uninhabited underwater vehicle is presented. To solve the problem, a new identification law is proposed, based on the procedure of dynamic expansion and mixing of the regressor and an algorithm for averaging estimates of unknown parameters. The resulting model with identified parameters approximates the dynamics of the immersion depth of a real apparatus with sufficient accuracy and is suitable for further calculation of robust standard controllers based on it.

Keywords: identification, dynamic regressor extension, estimate averaging, unmanned underwater vehicle, regressor excitation, control

Acknowledgements: the work was carried out with partial financial support from the Grant Council of the President of the Russian Federation (project MD-1787.2022.4).

For citation: Glushchenko A. I., Lastochkin K. A. Parameters identification for underwater vehicle diving depth model based on the regressor dynamic expansion and mixing procedure. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 241—250 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-241-250.

Введение. К сожалению, консерватизм специалистов в области прикладной теории автоматического управления затрудняет процесс интеграции современных и эффективных алгоритмов адаптивного и нелинейного управления в реальные системы регулирования.

© *Глущенко А. И., Ласточкин К. А., 2024*

В таких условиях при проектировании систем управления для новых даже сильно нелинейных и нестационарных объектов приходится довольствоваться недостаточно эффективными классическими законами управления (ПИ-, ПИД-, в лучшем случае — многостепенной ПИД) и выбирать их параметры устоявшимися эвристическими и полуэвристическими методами [1—5]. Однако расчет параметров даже таких простых регуляторов по заданным показателям качества переходных процессов часто оказывается невозможен без знания хотя бы приближенной линейной модели системы, что приводит к необходимости решения задачи параметрической идентификации.

На практике для этого обычно применяют методы идентификации параметров частотной передаточной функции системы [6, 7], в соответствии с которыми для получения приближенной линейной модели системы выполняется аппроксимация полученных экспериментально частотных характеристик, снятых путем многократного воздействия на вход системы с помощью гармонических тестовых сигналов с различными частотами. Но многократная подача на реальную систему тестовых воздействий может быть недопустима, особенно для неустойчивых и существенно нелинейных систем, а кроме того, для сильно инерционных систем снятие даже одной частотной характеристики может занимать до суток, что неприемлемо и кратно увеличивает затраты времени на проектирование системы управления.

С другой стороны, современные методы параметрической идентификации динамических систем во временной области [8, 9] не требуют многократных и продолжительных экспериментов, как и подачи на вход системы различных тестовых воздействий. Задача решается по результатам всего одного эксперимента с тестовым сигналом с большим числом частот (для линейной системы n-го порядка необходимо и достаточно иметь n частот в испытательном сигнале). Более того, современные алгоритмы идентификации с ослабленными условиями параметрической сходимости [8—11] часто вовсе не требуют внедрения тестовых сигналов, а позволяют определять точные значения параметров системы на ее естественных траекториях или же в процессе отработки ступенчатого испытательного/задающего воздействия. Другими значительными преимуществами методов идентификации во временной области являются: 1) применимость данных алгоритмов идентификации для оценивания параметров нелинейных динамических систем [12]; 2) возможность использования алгоритмов идентификации в автономном и автоматическом режиме [9], что позволяет строить непрямые адаптивные системы управления. В то время как классические методы частотной идентификации [6, 7], к сожалению, позволяют восстанавливать параметры только линейной аппроксимации нелинейной системы и являются офлайн-алгоритмами, т.е. требуют наличия человека для обработки экспериментальных данных.

Настоящая статья имеет две основные цели. Первая — продемонстрировать эффективность современных методов параметрической идентификации в применении к решению прикладных задач проектирования систем управления. Вторая и основная задача — идентификация параметров математической модели глубины погружения необитаемого подводного аппарата (НПА) „Водяной“ конструкторской разработки Института проблем управления РАН (Москва) [13].

Постановка задачи. Для решения задачи идентификации параметров математической модели глубины погружения НПА „Водяной“ (рис. 1) данная модель в инерциальной системе координат может быть представлена в следующем виде [14]:

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}\left[u_z(t) + f_b(t)\right], \tag{1}$$

где $z(t)$ — глубина, $u_z(t)$ — управляющее воздействие, $f_b(t)$ — сила, возникающая в результате действия гравитации, выталкивающей силы и возмущений, m — масса аппарата; сигналы $z(t), \dot{z}(t)$ и $u_z(t)$ считаются доступными для измерения.

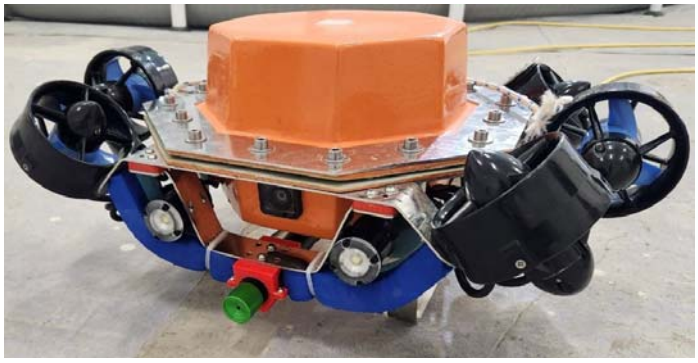


Рис. 1

Следуя классическим методам линейной теории автоматического управления, примем следующее допущение.

Допущение. Система (1) с достаточной точностью может быть описана линейной динамической моделью 2-го порядка:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\left(u_z(t) + \delta(t)\right),\ x(t_0) = x_0;$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix},\ x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — неизвестные параметры, $\delta(t)$ — ограниченная ошибка аппроксимации возмущения $f_b(t)$ слагаемым $\theta_3^{-1}\left(\theta_1 z(t) + \theta_2 \dot{z}(t)\right)$, $x(t) \in R^2$ — доступные для измерения координаты состояния.

Требуется определить функцию $w\colon\ R^2 \times R \mapsto R^3$, такую что алгоритм идентификации

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = w(x,\ u_z) \tag{3}$$

гарантирует выполнение предельного равенства

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \hat{\theta}(t) - \theta \right\| = 0, \tag{4}$$

где $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}^T$ — обобщенный вектор неизвестных параметров.

Метод решения. Для получения алгоритма идентификации параметров системы (2) на базе процедуры динамического расширения и смешивания регрессора выполним параметризацию скалярных регрессионных уравнений относительно θ_i.

Лемма. *Параметр* θ_i *удовлетворяет линейному регрессионному уравнению*

$$\mathcal{Y}_i(t) = \Delta(t)\theta_i + \mathcal{W}_i(t),\ i \in \overline{1,\ 3}, \tag{5}$$
$$\mathcal{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1(t) & \mathcal{Y}_2(t) & \mathcal{Y}_3(t) \end{bmatrix}^T := \operatorname{adj}\{\Phi(t)\} Y(t),\ \Delta(t) := \det\{\Phi(t)\};$$
$$\mathcal{W}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1(t) & \mathcal{W}_2(t) & \mathcal{W}_3(t) \end{bmatrix}^T := \operatorname{adj}\{\Phi(t)\} W(t),$$

где

$$\dot{Y}(t) = -lY(t) + \varphi(t) y(t),\ Y(t_0) = 0_3;$$
$$\dot{\Phi}(t) = -l\Phi(t) + \varphi(t)\varphi^T(t),\ \Phi(t_0) = 0_{3\times 3}; \tag{6}$$
$$\dot{W}(t) = -lW(t) + \varphi(t) w(t),\ W(t_0) = 0_{3\times 3};$$

$$y(t) = \frac{s}{s+q} x_2(t);\quad \varphi^T(t) = \left[\frac{1}{s+q}\left[x^T(t)\right] \quad \frac{1}{s+q}\left[u(t)\right] \right];\quad w(t) = \frac{1}{s+q}\left[\delta(t)\right] + \varepsilon(t), \tag{7}$$

$l > 0,\ q > 0$ — *параметры фильтров,* $s := \frac{d}{dt}$ — *оператор дифференцирования,* $\varepsilon(t)$ — *возмущение, вызванное ненулевыми начальными условиями системы.*

Доказательство. Представим второе уравнение системы (2) в операторной форме и умножим результат на $\frac{1}{s+q}$:

$$\begin{gathered} sx_2(t) = \left[x^T(t) \quad u(t)\right]\theta + \theta_3\delta(t), \\ \frac{s}{s+q}x_2(t) = \left[\frac{1}{s+q}\left[x^T(t)\right] \quad \frac{1}{s+q}\left[u(t)\right]\right]\theta + \theta_3\frac{1}{s+q}\left[\delta(t)\right]. \end{gathered} \tag{8}$$

Учитывая ненулевые начальные условия, на основе (8) и определений (7) имеем

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + w(t). \tag{9}$$

В силу θ=const , пропустив сигнал $y(t)$ через соответствующий фильтр из (6), получим

$$Y(t) = \Phi(t)\theta + W(t). \tag{10}$$

Умножая (10) на $\operatorname{adj}\{\Phi(t)\}$ и учитывая $\operatorname{adj}\{\Phi(t)\}\Phi(t) = \det\{\Phi(t)\}I_3$, имеем (5).

■

Заметим, что сигналы $\mathcal{Y}_i(t)$ и $\Delta(t)$ могут быть вычислены с использованием доступных для измерения величин $u_z(t)$ и $x(t)$. Используя результаты [15], по регрессионному уравнению (5) можно построить закон идентификации, гарантирующий выполнение цели (4) при удовлетворении возмущения условиям усреднения.

Теорема. *Пусть функции* $\mathcal{W}_i(t),\ i = \overline{1,\ 3},$ *удовлетворяют условиям усреднения:*

У₁: $\left|\mathcal{W}_i(t)\right| \le \mathcal{W}_{\max}$;

У₂: $\left|\int_{t_0}^{t} \Delta^{-1}(s)\mathcal{W}_i(s)\,ds\right| \le c_{\mathcal{W}} < \infty$.

Тогда если найдется $T \ge t_0$, *такое что* $\Delta(t) \ge \underline{\Delta} > 0$ *для всех* $t \ge T$, *то закон идентификации с усреднением*

$$\begin{gathered} \dot{\hat{\theta}}_i(t) = -\frac{1}{F_i(t)}\left(\hat{\theta}_i(t) - \vartheta_i(t)\right),\ \hat{\theta}_i(t_0) = \hat{\theta}_{0i}; \\ F_i(t) = t + k_i,\ k_i \ge 0;\ \ \vartheta_i(t) = \hat{\kappa}(t)\mathcal{Y}_i(t); \\ \dot{\hat{\kappa}}(t) = -\gamma\Delta(t)\left(\Delta(t)\hat{\kappa}(t) - 1\right) - \dot{\Delta}(t)\hat{\kappa}^2(t),\ \hat{\kappa}(t_0) = \hat{\kappa}_0; \\ \dot{\Delta}(t) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}\{\Phi(t)\}\dot{\Phi}(t)\right),\ \Delta(t_0) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

при выборе $\gamma > 0,$ *такого что* $\forall t \ge T$ *существует число* $\eta > 0$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\gamma\Delta^3(t) + \Delta(t)\dot{\Delta}(t)\hat{\kappa}(t) + \dot{\Delta}(t) \ge \eta\Delta(t) > 0\ \forall t \ge T, \tag{12}$$

гарантирует следующие свойства:

С₁) *если выполнено условие* ***У₁****, то* $\lim\limits_{t\to\infty}\left|\tilde{\theta}_i(t)\right| \le \left(\left|\tilde{\kappa}(t_0)\right| + \underline{\Delta}^{-1}\right)\mathcal{W}_{\max} + \overline{\Delta}\left|\theta_i\right| \cdot \left|\tilde{\kappa}(t_0)\right|,$

где $\left|\Delta(t)\right| \le \overline{\Delta},\ \tilde{\kappa}(t) = \hat{\kappa}(t) - \Delta^{-1}(t)$;

С₂) *если для* $i = \overline{1,\ 3}$ *выполнены условия* ***У₁—У₂****, то существует предел* (4).

Доказательство теоремы приведено в [15].

Таким образом, при удовлетворении условий усреднения **У₁**—**У₂** для всех $i=\overline{1,3}$ закон идентификации (11) гарантирует достижение поставленной цели (4). Если же эти условия не выполняются хотя бы в одном уравнении (5), то закон идентификации (11) обеспечивает ограниченность нормы параметрической ошибки. Основным конкурентным преимуществом закона идентификации (11) по сравнению с законами идентификации вида (см. [8, 11])

$$\begin{gathered}\dot{\hat{\theta}}(t)=-\Gamma\varphi(t)\left(\varphi^T(t)\hat{\theta}(t)-y(t)\right),\ \Gamma=\Gamma^T>0;\\ \dot{\hat{\theta}}(t)=-\gamma\left(\Phi(t)\hat{\theta}(t)-Y(t)\right),\\ \dot{\hat{\theta}}(t)=-\gamma\Delta(t)\left(\Delta(t)\hat{\theta}(t)-\mathcal{Y}(t)\right)\end{gathered} \tag{13}$$

является асимптотическая сходимость к нулю ошибки $\tilde{\theta}_i(t)$ при наличии в параметризации (5) возмущений $\mathcal{W}_i(t)$, $\mathrm{i}=\overline{1,3}$, удовлетворяющих условиям усреднения [15]. В то же время законы (13) независимо от выполнения или невыполнения условий **У₁**—**У₂** гарантируют только ограниченность ошибки $\tilde{\theta}_i(t)$, что неприемлемо для прикладных задач.

Замечание. Если полный вектор состояний системы (2) недоступен для измерений, то вместо (7) сигналы $y(t)$ и $\varphi(t)$ возможно вычислить следующим образом:

$$\begin{gathered}y(t)=\frac{s^2}{\Lambda(s)}\left[z(t)\right],\\ \varphi(t)=\left[\frac{-1}{\Lambda(s)}\left[z(t)\right]\quad\frac{-s}{\Lambda(s)}\left[z(t)\right]\quad\frac{1}{\Lambda(s)}\left[u_z(t)\right]\right]^T,\end{gathered} \tag{14}$$

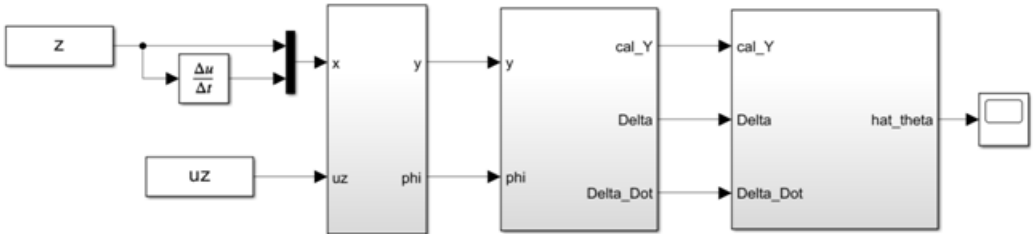
где $\Lambda(s)$— приведенный гурвицев многочлен 2-го порядка.

Основной результат. Для применения закона идентификации (11) реальный объект управления был замкнут ПИД-законом управления, обеспечивающим выполнение условия:

$$\lim_{t\to\infty}\left|z(t)-0{,}25\sin\left(0{,}3\pi\,\mathrm{t}\right)-0{,}5\right|\le\epsilon,$$

где $0{,}25\sin\left(0{,}3\pi\,\mathrm{t}\right)+0{,}5$ — тестовое воздействие, $\epsilon>0$ — достаточно малая постоянная.

С такой замкнутой системы с дискретностью, равной $\tau_m=0{,}011$ с, были сняты временные диаграммы изменения управления $u_z(t)$ и глубины $z(t)$ аппарата в течение 66 с непрерывного функционирования. Далее эти данные были конвертированы в файл типа csv и импортированы в среду MatLab/Simulink. В программе Simulink собрана схема идентификации, состоящая из блоков чтения данных, снятых с аппарата, и блоков, реализующих фильтрацию (6), (7), и построен алгоритм идентификации (11) (см. рис. 2). Для корректного чтения данных дискретность Simulink-модели была принята равной $\tau_s=0{,}0001$ с.



Фильтрация (7) | Динамическое расширение и смешивание регрессора (5) + (6) | Идентификация с усреднением (11)

Рис. 2

Отсутствие значительных помех в измерениях глубины позволило вычислить сигнал $x_2(t) = \dot{z}(t)$ прямым дифференцированием. В противном случае вместо (7) необходимо было бы использовать (14). Параметры фильтров (6), (7) и закона идентификации (11) были установлены в соответствии с выражением

$$q = 10,\ l = 1,\ \gamma = 10^6,\ k_i = 0\ \forall i \in \overline{1,\ 3}. \tag{15}$$

На рис. 3 приведены переходные процессы по сигналу управления и глубине реального НПА.

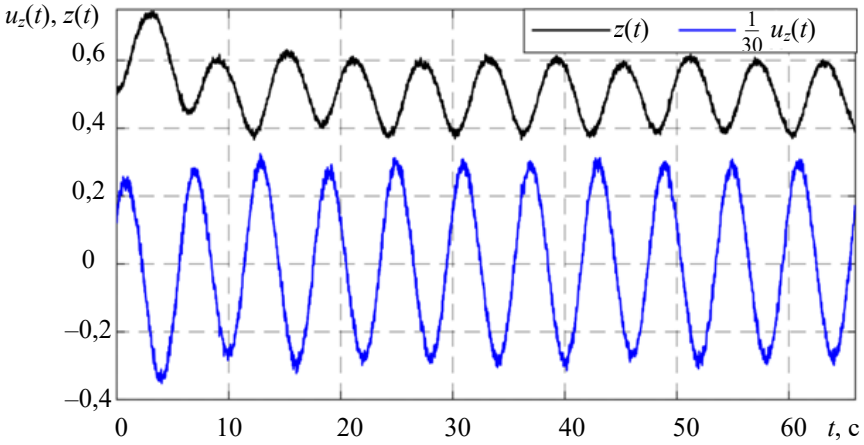


Рис. 3

Эти характеристики позволяют сделать вывод, что, во-первых, аппарат в процессе снятия реакции на тестовый сигнал, как и предписывалось, находился на глубине 0,5 м от поверхности, а во-вторых, выходная переменная и управление зашумлены.

На рис. 4 приведены переходные процессы по регрессору $\Delta(t)$ и оценкам $\hat{\theta}_i(t)$, формируемым алгоритмом идентификации.

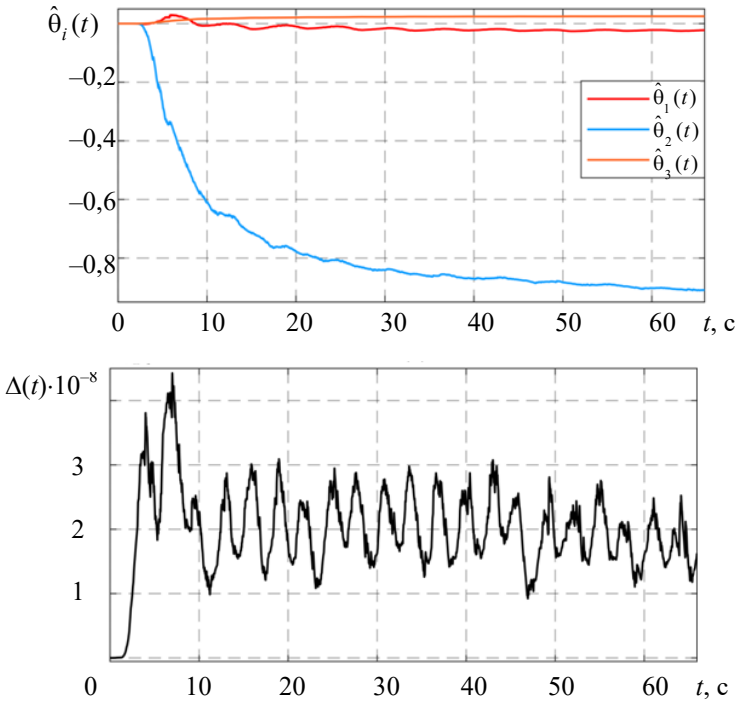


Рис. 4

Переходный процесс по регрессору $\Delta(t)$ позволяет сделать вывод о выполнении условия $\Delta(t) \geq \underline{\Delta} > 0$ из теоремы. Переходные процессы по $\hat{\theta}_i(t)$ завершились, и если условия **У$_1$**—**У$_2$** были выполнены в соответствующих уравнениях, то можно считать, что алгоритмом идентификации(11) были определены истинные значения параметров θ_i.

Финальные значения полученных оценок были зафиксированы, что позволило получить следующую модель системы (2):

$$z_{\mathrm{m}}(t) = \frac{0{,}02496}{s^2 + 0{,}9089s + 0{,}02276}\left[u_{zm}(t)\right], \tag{16}$$

где $u_{zm}(t)$ — управление моделью.

Для проверки качества идентификации модель (16) и реальный объект управления были замкнуты идентичным ПИД-регулятором:

$$\begin{aligned} u_z(t) &= 27{,}5e(t) + 3\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,d\tau + 6\dot{e}(t); \\ u_{zm}(t) &= 27{,}5e_m(t) + 3\int_{t_0}^{t} e_m(\tau)\,d\tau + 6\dot{e}_m(t), \end{aligned} \tag{17}$$

где $e(t) = r(t) - z(t)$ или $e_m(t) = r(t) - z_m(t)$ — ошибка слежения за задающим воздействием $r(t)$ на выходе объекта или модели.

На рис. 5, *а*—*г* приведены сравнительные графики переходных процессов по глубине и управлению НПА и модели (16) при использовании (17) и различных задающих воздействиях $r(t)$; на рис. 5, *г* используется ступенчатое задающее воздействие.

Полученные временные диаграммы показывают, что модель (16) с идентифицированными параметрами достаточно точно повторяет глубину НПА при различных задающих воздействиях (абсолютная ошибка $\left|z(t) - z_m(t)\right|$ не превышает 15 см при амплитуде шума датчика измерения глубины в 5 см).

Различия в переходных процессах между моделью (16) и реальным НПА вызваны, прежде всего, неустранимой в использованной параметризации ошибкой аппроксимации нелинейной функции $f_b(t)$ слагаемым $\theta_3^{-1}\left(\theta_1 z(t) + \theta_2 \dot{z}(t)\right)$. Для ликвидации этой ошибки и повышения качества модели необходимо расширение задачи идентификации путем параметризации $f_b(t)$ в виде $\Phi^T(x, u_z)\theta$, где $\Phi(x, u_z)$ — известная функция. Однако на низких частотах управления ошибка аппроксимации переходных процессов по глубине реального НПА является приемлемой, а полученная модель — линейной, что в перспективе позволит использовать стандартные робастные методы расчета параметров регуляторов. Безусловно, агрегирование переходных процессов по $z(t)$ и $u_z(t)$, представленных на рис. 5, *а*—*г*, позволит получить более точную линейную модель НПА. Однако качество аппроксимации динамики НПА моделью (16) является приемлемым, а сама модель получена на основании всего одного эксперимента (см. рис. 3), а не целой серии, что демонстрирует возможность существенного сокращения затрат времени на проектирование системы управления.

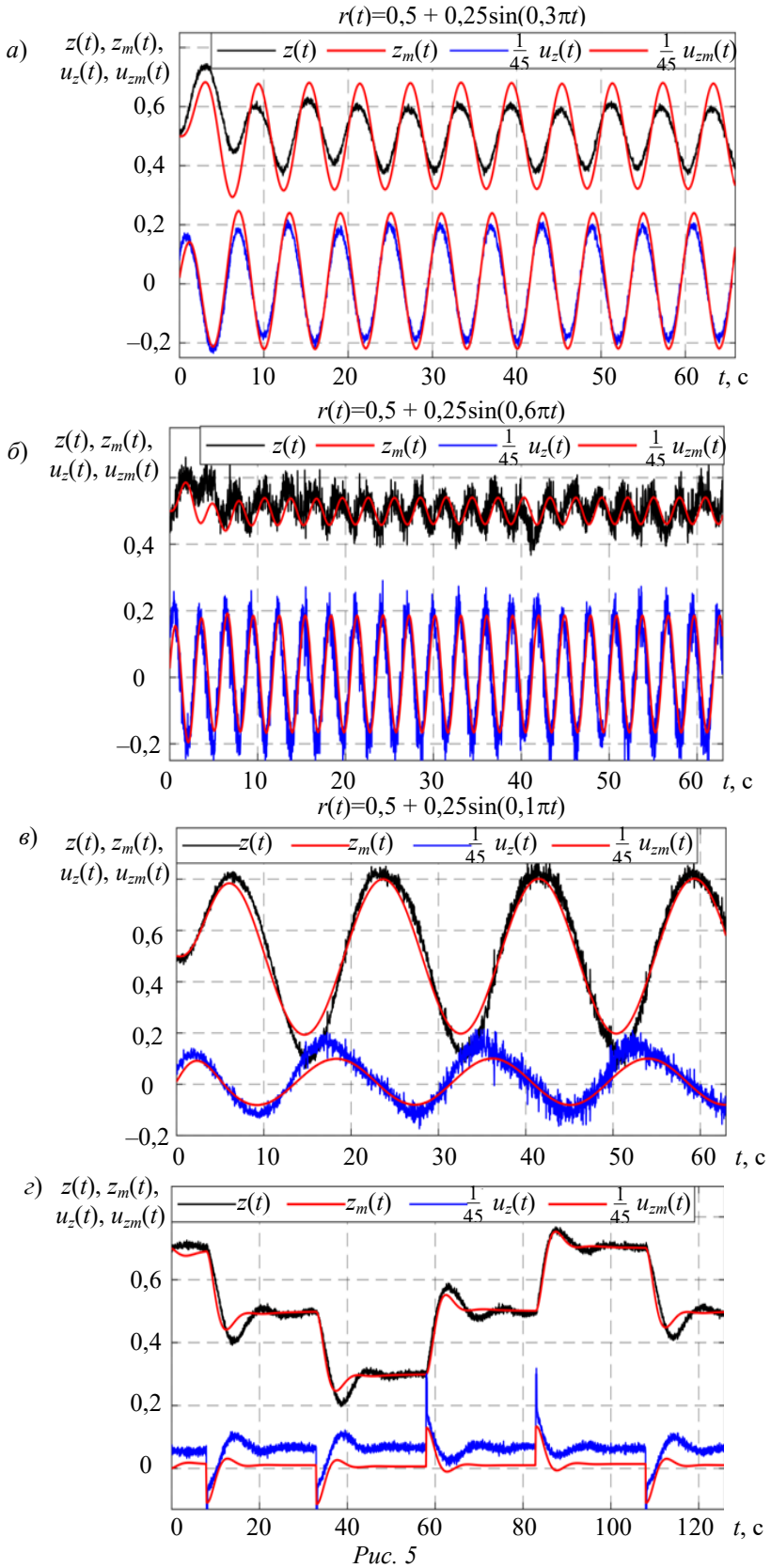


Рис. 5

В целом предложенный закон идентификации на базе процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (5), (6) [8, 11] и алгоритма усреднения [15] может быть успешно использован на практике для определения значений параметров различных реальных динамических систем.

Заключение. Выполнена идентификация параметров математической модели глубины погружения необитаемого подводного аппарата с помощью нового закона, построенного на базе процедуры динамического расширения и смешивания регрессора и алгоритма усреднения формируемых оценок неизвестных параметров. Полученная модель достаточно точно аппроксимирует динамику рассматриваемого объекта и подходит для дальнейшего использования с целью синтеза робастных типовых регуляторов.

Предложенный алгоритм может быть использован для идентификации параметров различных реальных технических систем. Кроме того, по сравнению с широко применяемым на практике методом частотной идентификации предложенный алгоритм:

— позволяет существенно сократить временные затраты на решение поставленной задачи;

— не требует выполнения множества экспериментов для снятия нескольких частотных характеристик;

— может быть использован в автоматическом и онлайн режиме;

— может быть применим в задачах идентификации параметров нелинейных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *O'Dwyer A.* Handbook of PI and PID controller tuning rules. World Scientific, 2009.
2. *Astrom K. J.* PID controllers: theory, design, and tuning / The International Society of Measurement and Control. 1995.
3. *Ziegler J. G., Nichols N. B.* Optimum settings for automatic controllers // Trans. of the American Society of Mechanical Engineers. 1942. Vol. 64, N 8. P. 759—765. DOI: 10.1115/1.4019264.
4. *Яковис Л. М.* Простые способы расчета типовых регуляторов для сложных объектов промышленной автоматизации // Автоматизация в промышленности. 2007. № 6. С. 51—56.
5. *Ротач В. Я.* Расчет настройки промышленных систем регулирования. М. — Л.: Госэнергоиздат, 1961. 344 с.
6. *Рабкин Г. Л., Митрофанов В. А., Штеренберг Ю. О.* Об определении численных значений коэффициентов передаточных функций линеаризованных звеньев и систем по экспериментальным частотным характеристикам // Автоматика и телемеханика. 1955. Т. 16, № 5. С. 488—494.
7. *Pintelon R., Guillaume P., Rolain Y., Schoukens J., Van Hamme H.* Parametric identification of transfer functions in the frequency domain-a survey // IEEE Trans. on Automatic Control. 1994. Vol. 39, N 11. P. 2245—2260. DOI: 10.1109/9.333769.
8. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // Annual Rev. in Control. 2020. Vol. 50. P. 278—293. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2020.06.002.
9. *Guo K., Pan Y.* Composite adaptation and learning for robot control: A survey // Annual Rev. in Control. 2023. Vol. 55. P. 279—290. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2022.12.001.
10. *Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J. G., Yi B.* Identifiability Implies Robust, Globally Exponentially Convergent On-line Parameter Estimation // Intern. Journal of Control. 2023. P. 1—16. DOI: 10.1080/00207179.2023.2246595.
11. *Gerasimov D. N., Nikiforov V. O.* On key properties of the Lion's and Kreisselmeier's adaptation algorithms // Intern. Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2022. Vol. 36, N 6. P. 1285—1304. DOI: 10.1002/acs.3311.
12. *Ortega R., Gromov V., Nuño E., Pyrkin A., Romero J. G.* Parameter estimation of nonlinearly parameterized regressions without overparameterization: application to adaptive control // Automatica. 2021. Vol. 127. P. 109544. DOI: 10.1016/j.automatica.2021.109544.
13. *Abdulov A., Abramenkov A.* Extra Steering for ROV Control System by Tracking the Gamepad Orientation // Proc. of the Intern. Russian Automation Conf. (RusAutoCon). Sochi: IEEE, 2021. P. 1041—1045. DOI: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537456.
14. *Fossen T. I.* Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control. John Wiley and Sons, 2011.

15. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Exact asymptotic estimation of unknown parameters of regressionequations with additive perturbations // Preprint arxiv.org 2310.14073. P. 1—6. https://arxiv.org/abs/2310.14073.

Сведения об авторах

Антон Игоревич Глущенко — д-р техн. наук, доцент; Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, лаборатория № 7 адаптивных и робастных систем им. Я. З. Цыпкина; вед. научный сотрудник; E-mail:aiglush@ipu.ru

Константин Андреевич Ласточкин — Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, лаборатория № 7 адаптивных и робастных систем им. Я. З. Цыпкина; мл. научный сотрудник; E-mail: lastconst@ipu.ru

Поступила в редакцию 31.10.2023; одобрена после рецензирования 04.12.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. O'Dwyer A. *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, World Scientific, 2009.
2. Astrom K.J. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, The International Society of Measurement and Control, 1995.
3. Ziegler J.G., Nichols N.B. *Transactions of the American society of mechanical engineers*, 1942, no. 8(64), pp. 759–765, DOI: 10.1115/1.4019264.
4. Yakovis L.M. *Avtomatizatsiya v promyshlennosti*, 2007, no. 6, pp. 51–56, EDN: IBKZTV. (in Russ.)
5. Rotach V.Ya. *Raschet nastroyki promyshlennykh sistem regulirovaniya* (Calculation of Settings for Industrial Control Systems), Moscow, Leningrad, 1961, 344 p. (in Russ.)
6. Rabkin G.L., Mitrofanov V.A., Shterenberg Yu.O. *Automation and Remote Control*, 1955, no. 5(16), pp. 488–494. (in Russ.)
7. Pintelon R., Guillaume P., Rolain Y., Schoukens J., Van Hamme H. *IEEE Transactions on automatic control*, 1994, no. 11(39), pp. 2245–2260, DOI: 10.1109/9.333769.
8. Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D. *Annual Reviews in Control*, 2020, vol. 50, pp. 278–293, DOI: 10.1016/j.arcontrol.2020.06.002.
9. Guo K., Pan Y. Annual Reviews in Control, 2023, vol. 55, pp. 279–290, DOI: 10.1016/j.arcontrol.2022.12.001.
10. Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J. G., Yi B. *International Journal of Control*, 2023, pp. 1–16, DOI: 10.1080/00207179.2023.2246595.
11. Gerasimov D.N., Nikiforov V.O. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2022, no. 6(36), pp. 1285–1304, DOI: 10.1002/acs.3311.
12. Ortega R., Gromov V., Nuño E., Pyrkin A., Romero J.G. *Automatica*, 2021, vol. 127, p. 109544, DOI: 10.1016/j.automatica.2021.109544.
13. Abdulov A., Abramenkov A. *Proceedings of 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*, Sochi, IEEE, 2021, pp. 1041–1045, DOI: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537456.
14. Fossen T.I. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*, John Wiley and Sons, 2011.
15. Glushchenko A., Lastochkin K. *Preprint arxiv.org 2310.14073*, pp.1–6, https://arxiv.org/abs/2310.14073.

Data on authors

Anton I. Glushchenko — Dr. Sci., Associate Professor; V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the RAS, Ya. Z. Tsypkin Laboratory #7 of Adaptive and Robust Systems; Leading Researcher; E-mail:aiglush@ipu.ru

Konstantin A. Lastochkin — V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the RAS, Ya. Z. Tsypkin Laboratory #7 of Adaptive and Robust Systems; Junior Researcher; E-mail: lastconst@ipu.ru

Received 31.10.2023; approved after reviewing 04.12.2023; accepted for publication 14.01.2024.

УДК 519.4
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-251-256

ПЕРСПЕКТИВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ВЫБОРА И РАНЖИРОВАНИЯ „СВИРЬ“

С. В. Микони*, В. В. Захаров

Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр РАН,
Санкт-Петербург, Россия,
** smikoni@mail.ru*

Аннотация. На основании описательной модели открытого множества сформулированы разновидности задач классификации, реализованные в новой версии программной системы выбора и ранжирования „СВИРЬ-М“. В данной системе расширен список задач классификации объектов, где задачи по принципу решения разделены на две группы: по заданным условиям принадлежности к классам и по отклонениям от класса, принятого за норму. Первую группу образуют задачи выбора класса по логическому выражению и функциям принадлежности, а вторую группу — задачи выбора действия по отклонению от нормы либо сопоставления объектов по степени отклонения от нормы. Выбор класса по функции принадлежности осуществляется на основе как упорядоченных классов на шкалах показателей (нечеткий выбор), так и неупорядоченных классов (распознавание сущности по многим показателям). Отсутствие связи с предметным языком и общность математических моделей позволяют решать изложенные задачи в различных предметных областях. Простота работы в системе „СВИРЬ“ обеспечивается контекстно-зависимым интерфейсом формулирования задач и автоматизацией создания модели предметной области и оценочных функций показателей на основе исходных данных, заданных в пакете Excel.

Ключевые слова: *классификация, класс, упорядочение, выбор, норма, оценочная функция, инструментальная система, автоматизация выбора*

Благодарности: исследования выполнены в рамках бюджетной темы FFZF–2022–0004.

Ссылка для цитирования: *Микони С. В., Захаров В. В.* Перспективы решения задач организационного управления в инструментальной системе выбора и ранжирования „СВИРЬ“ // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 251—256. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-251-256.

PROSPECTS FOR SOLVING PROBLEMS OF ORGANIZATIONAL MANAGEMENT IN THE INSTRUMENTAL SELECTION AND RANKING SYSTEM „SVIR“

S. V. Mikoni*, V. V. Zakharov

St. Petersburg Federal Research Center of the RAS,
St. Petersburg, Russia
** smikoni@mail.ru*

Abstract. Based on the descriptive open set model, varieties of classification problems are formulated and implemented in the new version of the software system for selection and ranking „SVIR-M“. In this system, the list of object classification problems is expanded, where the problems, according to the principle of solution, are divided into two groups: according to the given conditions of belonging to classes and according to deviations from the class accepted as the norm. The first group consists of problems of choosing a class based on a logical expression and membership functions, and the second group consists of problems of choosing an action to deviate from the norm or comparing objects according to the degree of deviation from the norm. The selection of a class by membership function is carried out on the basis of both ordered classes on indicator scales (fuzzy choice) and unordered classes (entity recognition by many indicators). The lack of connection with the subject language and the generality of mathematical models makes it possible to solve the stated problems in various subject areas. Ease of operation in the „SVIR“ system is ensured by a context-sensitive interface for formulating tasks and automation of the creation of a domain model and evaluation functions of indicators based on source data specified in the Excel package.

Keywords: classification, class, ordering, choice, norm, evaluation function, instrumental system, selection automation

Acknowledgements: the research was carried out within the framework of the budget theme FFZF–2022–0004.

© Микони С. В., Захаров В. В., 2024

For citation: Mikoni S. V., Zakharov V. V. Prospects for solving problems of organizational management in the instrumental selection and ranking system „SVIR“. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 251—256 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-251-256.

Введение. Конечной целью управленческой задачи верхнего уровня является либо выбор наилучшего объекта из их конечного числа, либо выбор класса, к которому в наибольшей степени принадлежит рассматриваемый объект. В соответствии с назначением эти задачи разделены на два класса: задачи оптимизации и классификации. Первый класс задач реализует отношение предпочтения, а второй класс — отношение соответствия. Отнесение практической задачи, включающей решение задач обоих классов, к конкретному классу определяется первичностью одного из классов.

В работе [1] приведено теоретическое обоснование целесообразности объединения моделей классификации и упорядочения объектов в рамках одной инструментальной системы. Эта идея реализована в модифицированной системе выбора и ранжирования „СВИРЬ-М“, отличительные особенности которой — расширение списка задач классификации и автоматизация построения начальных оценочных функций на основе требований, предъявляемых к характеризующим оцениваемый объект показателям. Первое свойство позволяет решать новые задачи классификации, а второе — облегчить построение моделей многомерного оценивания объектов при большом количестве показателей.

Задачи классификации, решаемые в системе „СВИРЬ-М“, рассмотрим, исходя из описательного определения открытого множества (класса) [2]:

$$H = \left\{ x : \bigvee_{j=1}^{n} \Pr(f_j(x), c_j) \right\}. \qquad (1)$$

Сущность x принадлежит множеству H, если она отвечает хотя бы одному из n условий, сформулированных двухместным предикатом $\Pr(f_j(x), c)$, где $f_j(x)$ — значение j-го признака (свойства) x, c_j — требование, предъявляемое к этому свойству.

Выбор класса по логическому выражению. Если множество H дискретно и конечно $|H| = N$, а его элементы различаются комбинациями признаков, то за $n =]\log_2 N[^*$ шагов можно выделить из него элемент x, отвечающий совокупности n условий:

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \Pr(f_j(x), c_j). \qquad (2)$$

Этот принцип реализуется деревом решений, осуществляющим выбор одной из множества N альтернатив. Под альтернативой в системе „СВИРЬ-М“ понимается класс из заданного перечня классов. Принадлежность к классу задается совокупностью требований (предикатов) к значениям показателей. Принадлежность оцениваемого объекта к одному из классов устанавливается по истинности логического выражения, характеризующего этот класс.

Выбор класса по функции принадлежности. Факт принадлежности элемента x множеству X ($x \in X$) описывается характеристической функцией

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in X, \\ 0, \text{ если } x \notin X. \end{cases} \qquad (3)$$

При наличии более одного класса шкала признака делится на $m>1$ диапазонов, а k-му классу, $k = \overline{1,m}$, ставится в соответствие диапазон $[c_{kj,\min}, c_{kj,\max}]$ значений j-го признака,

[*] Символы] [означают ближайшее большее целое число.

$j=\overline{1,n}$. Отсюда число диапазонов значений признака, участвующего в классификации объектов, должно соответствовать числу классов m.

На рисунке на примере трех классов показаны варианты границ между их функциями принадлежности. Условно средний класс принят за норму (Н), левый класс объединяет значения j-го показателя, меньшие нормы (МН), а правый (БН) класс — значения, превышающие норму.

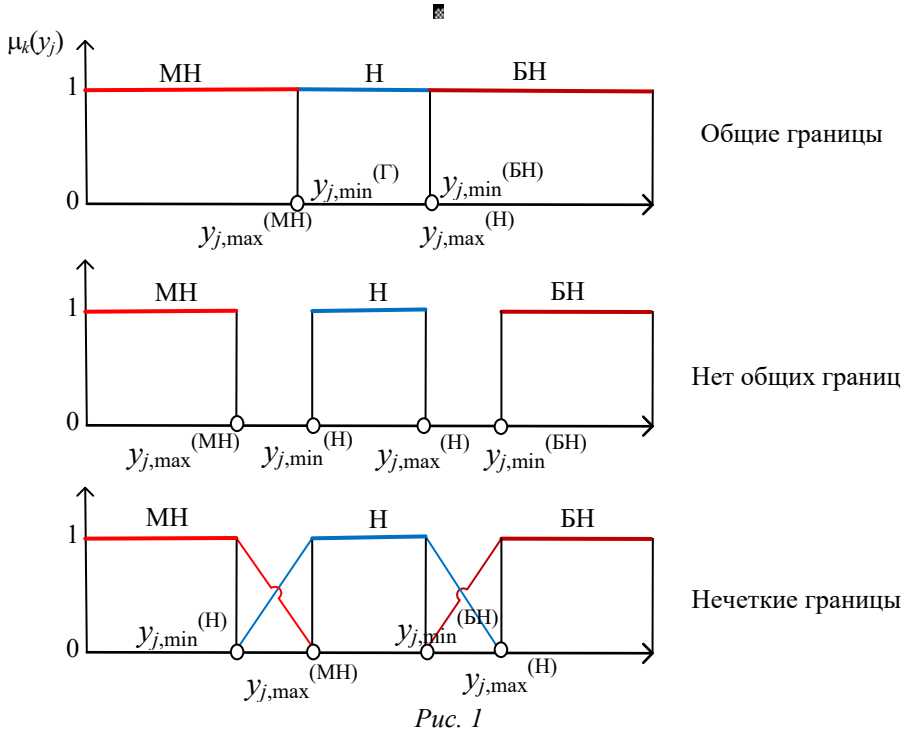


Рис. 1

Классификация по нечетким функциям принадлежности. Модель функций принадлежности показателей к классам с нечеткими границами представляет их расплывчатость, характерную для человеческого восприятия внешнего и внутреннего мира. Фактически она отражает разномыслие людей, проявляющееся в различного рода экспертизах.

Граница между k-м и l-м смежными классами на шкале j-го признака называется *нечеткой*, если имеет место пересечение поставленных им в соответствие диапазонов значений: $[c_{kj,\min}, c_{kj,\max}] \cap [c_{lj,\min}, c_{lj,\max}] \neq \varnothing$.

Принадлежность объекта x к каждому из смежных классов в интервале $[c_{lj,\min}, c_{kj,\max}]$ означает частичное обладание j-м свойством, что соответствует философии *частичной* истины [3]. Для ее оценивания применяется функция принадлежности $\mu_{jk}(x)$ к k-му классу по j-му свойству. Наличие общей шкалы у функций принадлежности к разным классам позволяет классифицировать объект x на основе средневзвешенной аддитивной функции принадлежности к k-му классу по n признакам [2]:

$$\mu_k(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mu_{jk}(x), \quad k=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где w_j — вес (значимость) j-го признака; если все признаки имеют равную значимость, их веса равны $w_j=1/n$.

Поскольку в общем случае имеет место *частичная* принадлежность объекта x к k-му классу по n признакам ($\mu_k(x) \in [0, 1]$), $k=\overline{1,m}$, класс h^*, к которому объект x принадлежит в большей степени, определяется по максимальному значению функции принадлежности к этому классу:

$$h^* = \arg(\max_k \mu_k(x)). \quad (5)$$

Распознавание классов по многим признакам. Модель функций принадлежности показателей к классам, не имеющим общих границ, не претендует на упорядоченность классов по качеству, несмотря на порядок значений показателя в сторону их увеличения. Это позволяет применять эту модель в общих задачах распознавания. Под распознаванием понимается нахождение класса, степень принадлежности к которому объекта, оцениваемого по многим показателям, максимальна. Реализация этой модели описана в [4].

Выбор действия по отклонению от нормы. Примем за норму состояние сущности x, представленное значениями n характеризующих ее показателей в момент времени t:

$$\mathbf{y}(t) = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n). \quad (6)$$

В силу зависимости состояния сущности x от внутренних и внешних воздействий возникают отклонения значений показателей от заданных нормативных значений. Нормативное значение j-го показателя, $j = \overline{1,n}$, со шкалой $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ в общем случае задается интервальным ограничением $[c_н, c_в]$, $y_{j,\min} \le c_н < c_в \le y_{j,\max}$. В векторной форме обобщенные нормы представляются векторами нижних и верхних границ значений параметров: $\mathbf{c}_н = (c_{н1},\ldots, c_{нj},\ldots, c_{нn})$ и $\mathbf{c}_в = (c_{в1},\ldots, c_{вj},\ldots, c_{вn})$.

Симметричное отклонение значения j-го параметра y_j от точечной нормы c_j выражается разностью $\Delta_j = \Delta(y_j) = y_j - c_j$ с двумя результатами: $y_j - c_j > 0$ и $y_j - c_j < 0$. Для интервальной нормы эти разности определяются соответственно относительно верхней и нижней границ интервала: $y_j - c_{jв} > 0$ и $y_j - c_{jн} < 0$. Первая разность означает *превышение* нормы, а вторая — *недостижимость* нормы. Для кодирования количественного симметричного отклонения от нормы фактом отклонения требуется учитывать знак разности — соответственно плюс (+1) и минус (– 1).

На основе вектора количественных отклонений от нормы $\Delta(y)$ формируется троичный вектор отклонений от нормы $\mathbf{d}(\mathbf{y}) = (d_1,\ldots,d_j,\ldots, d_n)$. При нарушении нижней границы ($y_j - c_{нj} < 0$) задается значение $d_j = -1$, а при нарушении верхней границы ($y_j - c_{вj} > 0$) — значение $d_j = +1$. В отсутствие нарушений $d_j = 0$.

По количеству одновременно зафиксированных отклонений от нормы они делятся на одиночные и кратные. Для одиночных отклонений от нормы формируется матрица $\mathbf{D}_1 = \|d_{ij}\|$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$, где N — число реакций на одиночные отклонения. В общем случае $N < n$.

Условием отсутствия отклонений является истинность выражения

$$\forall\ j \in J\ \mathrm{Pr}_{=}(d_{ij}, 0). \quad (7)$$

Ложность выражения вида (7) является индикатором необходимости поиска вектора отклонений $\mathbf{d}_i$, совпадающего с одним из векторов матрицы $\mathbf{D}_1$. Выбирается действие a_i, поставленное в соответствие вектору $\mathbf{d}_i$. Если в матрице отклонений отсутствует вектор, равный вектору $\mathbf{d}(\mathbf{y})$, то определяется вектор, фиксирующий отклонение наиболее приоритетного показателя. Приведенная модель ориентирована на реализацию ситуационного управления объектами [5].

Сопоставление объектов по отклонению от норм. Для решения этой задачи применяется модель трех классов с общими границами. Прямоугольные функции принадлежности к классам МН и БН в модели, показанной на рисунке, заменяются на функции принадлежности, возрастающие к границам шкалы. Эта модель применима для решения задач отслеживания (мониторинга) состояния действующего объекта [6]. В отличие от ситуационного управления, отклонение значения показателя от нормы в этой задаче является признаком не для парирования последствий отклонения, а для анализа его причины. Если, например, в частной задаче за норму принять ресурсы противника, то по отклонениям от них собственных ресурсов можно судить о соотношения сил противоборствующих сторон по многим показателям.

Заключение. Представлена краткая информация о возможностях новой версии программной системы „СВИРЬ-М“ в части решения задач классификации. Задачи могут быть решены как по отдельности, так и в комплексе на единой инструментальной базе. Объединенные с задачами упорядочения сущностей, они охватывают все основные задачи принятия решений на конечном множестве альтернатив. Не привязанный к конкретной предметной области типовой набор моделей многомерного оценивания позволяет решать различные задачи организационного управления в любых предметных областях, например в авиакосмической, транспортно-логистической, сельскохозяйственной и т.д. [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Микони С. В.* Системный анализ моделей классификации и упорядочения объектов // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 11. С. 796—801.
2. *Микони С. В.* О классе, классификации и систематизации // Онтология проектирования. 2016. Т. 6, № 1(19). С. 67—80.
3. *Zadeh L. A.* Toward perseption-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities // Сб. докл. Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям, SCM'2003. СПб: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2003. С. 69—75.
4. *Микони С. В., Найденова К. А., Сорокина М. И.* Автоматизация создания системы рационального распределения выпускников Военно-медицинской академии с помощью инструментальной системы поддержки принятия решений „СВИРЬ“ // Материалы XXXIII Междунар. конф. „Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе IT + S&E’06“, Гурзуф, 20—30.05.2006. Запорожье, 2006. С. 111—113.
5. *Микони С. В.* Табличная модель принятия оперативных решений беспилотным летательным аппаратом // Авиакосмическое приборостроение. 2023. № 8. С. 3—12.
6. *Соколов Б. В., Ковалев А. П., Мустафин Н. Г., Захаров В. В., Щербакова Е. Е.* Методологические основы проактивного управления социокиберфизическими системами // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 12. С. 1018—1021.
7. *Захаров В. В., Баранов А. Ю., Соколов Б. В.* Разработка и внедрение элементов информационно-аналитической платформы для решения транспортно-логистических задач // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 2. С. 118—124. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-2-118-124.

Сведения об авторах

Станислав Витальевич Микони — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр РАН, СПИИРАН, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании; вед. научный сотрудник; E-mail: smikoni@mail.ru

Валерий Вячеславович Захаров — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр РАН, СПИИРАН, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании; ст. научный сотрудник; E-mail: valeriov@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.11.2023; одобрена после рецензирования 23.11.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. Mikoni S.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2022, no. 11(65), pp. 796–801. (in Russ.)
2. Mikoni S.V. *Design ontology*, 2016, no. 1(6), pp. 67–80. (in Russ.)
3. Zadeh L.A. Sbornik dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii po myagkim vychisleniyam i izmereniyam SCM'2003 (Collection of reports of the International Conference on Soft Computing and Measurements SCM'2003), St. Petersburg, 2003, pp. 69–75. (in Russ.)
4. Mikoni S.V., Naydenova K.A., Sorokina M.I. *Informatsionnyye tekhnologii v nauke, obrazovanii, telekommunikatsii i biznese IT + S&E’06* (Information Technologies in Science, Education, Telecommunications and Business IT + S&E’06), Proceedings of the XXXIII International Conference, Gurzuf, May 20–30, 2006, Zaporozhye, 2006, pp. 111–113. (in Russ.)
5. Mikoni S.V. *Aerospace Instrument-Making*, 2023, no. 8, pp. 3–12. (in Russ.)

6. Sokolov B.V., Kovalev A.P., Mustafin N.G., Zakharov V.V., Shcherbakova E.E. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 12(64), pp. 1018–1021. (in Russ.)
7. Zakharov V.V., Baranov A.Yu., Sokolov B.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 2(66), pp. 118–124, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-2-118-124. (in Russ.)

Data on authors

Stanislav V. Mikoni — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg Federal Research Center of the RAS, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, Laboratory for Information Technologies in Systems Analysis and Modeling; Leading Researcher; E-mail: smikoni@mail.ru

Valery V. Zakharov — PhD; St. Petersburg Federal Research Center of the RAS, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, Laboratory for Information Technologies in Systems Analysis and Modeling; Senior Researcher; E-mail: valeriov@yandex.ru

Received 17.11.2023; approved after reviewing 23.11.2023; accepted for publication 14.01.2024.

УДК 535.317.2
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-257-267

ДИФРАКЦИОННЫЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

В. К. Кирилловский, Т. В. Точилина*

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
**tvtochilina@itmo.ru, tvtochilina@mail.ru*

Аннотация. Представлен обобщенный анализ инновационной группы методов и приборов дифракционной интерферометрии в сопоставлении с традиционными интерферометрами. Рассмотрены новые возможности для снижения погрешности и повышения чувствительности измерений, получения надежных, метрологически высоких результатов. Надежность достигается с помощью дифракции и стабильного опорного волнового фронта, не чувствительного к вибрациям, термическим и гравитационным воздействиям. Фронт формируется с пренебрежимо малыми погрешностями в результате дифракции лазерного пучка, сфокусированного на точечном отверстии в металлическом экране. Отмечена целесообразность развития методов дифракционной интерферометрии на основе новых схемных решений и современной элементной базы с использованием оценки качества изображения оптических систем с помощью компьютерной расшифровки интерферограммы и математического аппарата интерферометрической обработки информации. Предложенный подход может быть применен в условиях реального оптического производства, медицинской практики и при научных исследованиях.

Ключевые слова: *дифракционные интерферометры, дифрагированный волновой фронт, погрешности измерений*

Ссылка для цитирования: *Кирилловский В. К., Точилина Т. В.* Дифракционные интерферометры. Аналитический обзор // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 257—267. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-257-267.

DIFFRACTION INTERFEROMETERS. ANALYTICAL REVIEW

V. K. Kirillovsky, T. V. Tochilina*

ITMO University, St. Petersburg, Russia
**tvtochilina@itmo.ru, tvtochilina@mail.ru*

Abstract. A generalized analysis of an innovative group of diffraction interferometry methods and instruments is presented in comparison with traditional interferometers. New possibilities are considered for reducing the error and increasing the sensitivity of measurements, obtaining reliable results of metrologically high quality. Reliability is achieved through diffraction and a stable reference wavefront that is not sensitive to vibration, thermal and gravitational influences. The devices considered use a reference wavefront formed on an unpolished optical surface. The front is formed with negligible errors as a result of diffraction of a laser beam focused on a pinhole in a metal screen. The feasibility of developing diffraction interferometry methods based on new schematic solutions and modern element base using assessment of the image quality of optical systems with computer decoding of the interferogram and the mathematical apparatus of interferometric information processing is noted. The proposed approach can be applied in real optical production, medical practice, and scientific research.

Keywords: diffraction interferometers, diffracted wavefront, measurement errors

© Кирилловский В. К., Точилина Т. В., 2024

For citation: Kirillovsky V. K., Tochilina T. V. Diffraction interferometers. Analytical review. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 257—267 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-257-267.

Введение. Решение задач оптического контроля и исследования оптических систем и приборов в процессе их разработки, а также во время испытания, изготовления и использования является важным направлением в различных областях применения. Понятие „высокоточное измерение“ определяет количественные и качественные параметры исследуемых объектов. В природе закономерности чаще всего обнаруживаются в численной форме, в результате количественных оценок наблюдаемых объектов и явлений. От развития методов и средств измерений, снижения их погрешностей и повышения чувствительности, и соответственно результатов, которые будут получены в процессе измерений, зависит достоверность описания исследуемых объектов и истинность модели окружающего мира [1].

Оптические методы измерений отличаются минимальными погрешностями. С помощью традиционных методов оптических измерений возможно получить пороговую чувствительность порядка 0,1λ используемого излучения, которая для видимого излучения составляет 0,5 мкм [2, 3].

Анализ источников погрешностей традиционных интерферометров и поиск оптимальных способов их радикального снижения показывает, что для получения требуемых результатов необходимы разработка и применение новых решений. Одно из таких решений — интерференционные методы измерения деформаций волнового фронта. Структура изображения, построенного с использованием изготовленной оптической системы, может быть экспериментально получена прямым или косвенным путем.

К наиболее известным косвенным традиционным методам исследования качества полученного изображения относятся: теневой метод Фуко и метод Гартмана [3]. Также к таким методам относятся интерферометры Майкельсона, Тваймана и Физо, содержащие образцовую деталь, и сдвиговые, дифракционные, голографические интерферометры и интерферометр Ронки, не содержащие образцовую деталь [1—14]. Преимущества косвенных методов заключаются в возможности по известной топографии отклонений фронта волны рассчитать большинство характеристик качества изображения. Полученные результаты не зависят от особенностей приемника изображения в схеме контроля. Косвенные методы позволяют определить влияние конкретных искажений волнового фронта, вносимых системой, на качество изображения, что обусловливает возможность широкого применения этих методов на практике, например при обработке оптических поверхностей, изготовлении и юстировке оптических систем и элементов.

В настоящее время создаются интерферометры нового класса, которые применяются для достижения повышенного уровня точности оптических систем и чувствительности исследований в микроэлектронике, микроскопии, лазерных технологиях и астрономии, космической технике, а также для исследований в нефтегазовой сфере, медицине и генетике, в области продовольственной безопасности и экологии, в астрофизике, в науке о строении Вселенной и солнечной системы.

Требования к погрешностям образцовых элементов традиционных интерферометров. Традиционные интерферометры (например, по схеме Физо или Тваймана — Грина) характеризуются тем, что для формирования опорного волнового фронта в их конструкции необходимо применение образцового оптического элемента (плоской или сферической оптической поверхности). При изготовлении оптической поверхности неизбежна остаточная погрешность образцовой детали.

В схеме лазерного неравноплечего интерферометра (рис. 1, *а*) со сферической образцовой поверхностью луч лазера *1* проходит через осветительную систему *2—6*, далее выполняется

оценка изображений образцовой *7* и исследуемой *8* оптических поверхностей визуально оператором или с помощью видеокамеры *9*, *10*. По виду интерференционной картины определяется погрешность оптической поверхности *8* как отношение максимальной стрелки прогиба *h* интерференционной полосы к шагу *l* (периоду) полосы (рис. 1, *б*) [1, 2].

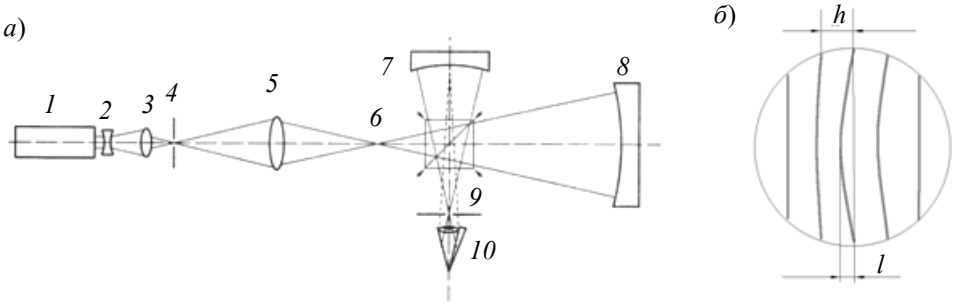


Рис. 1

На практике получаемая погрешность равна λ/20. Отметим, что данная погрешность зависит от влияния на оптическую поверхность вибраций, а также термических, механических и гравитационных воздействий, которые нестабильны во времени. Общий вид лазерного неравноплечего интерферометра и полученная интерферограмма оптической поверхности (очковой линзы) показаны на рис. 2, *а*, *б*.

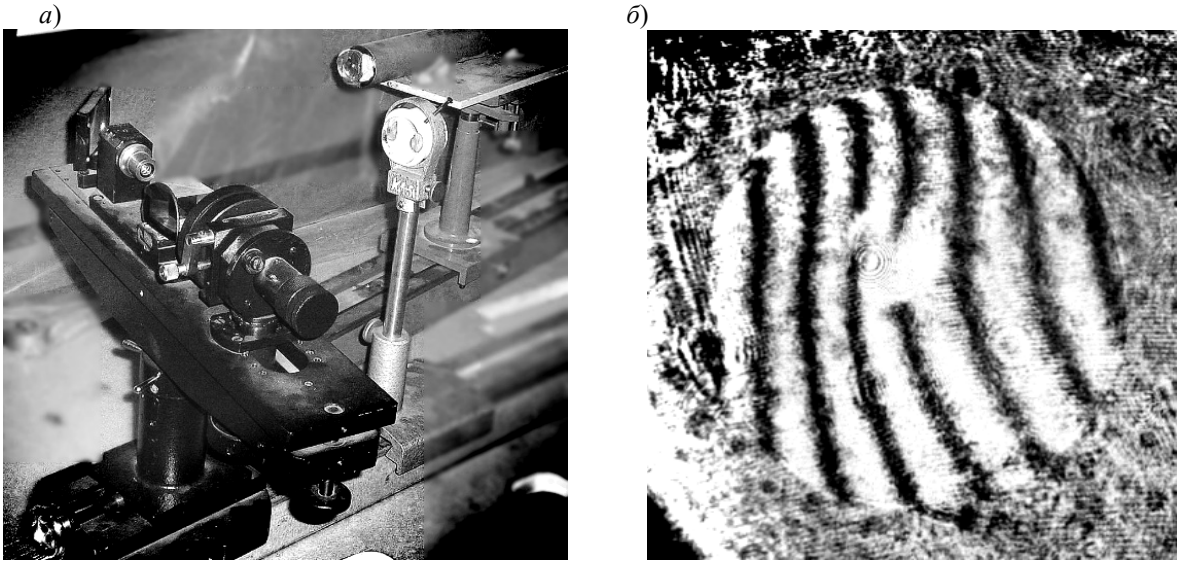


Рис. 2

При использовании оптических методов измерений следует учитывать, что погрешность средства измерения должна быть в 5—10 раз меньше погрешности исследуемого прибора. Для этого определены стандартные требования к погрешности для контроля интерферометрических эталонов $\omega_{эт}$, демонстрирующих качество распознавания характеристик изображения в виде аберраций и погрешностей оптических систем различных классов (см. таблицу) [2].

Тип оптической системы	Требования к погрешности		Погрешность образцового волнового фронта ω_R
	системы	прибора контроля	
Зрительная труба	0,25λ	(0,025—0,05)λ	0,032λ
Исследовательский микроскоп	0,05λ	(0,005—0,01)λ	0,007λ
Космический телескоп	0,03λ	(0,003—0,006)λ	0,0045λ

В традиционной интерферометрии значение требуемой погрешности приборов, используемых, например, в вакууме, при влиянии вибраций, гравитации и в других условиях, также относится к допустимым остаточным погрешностям образцового волнового фронта ω_R [2].

Применение программы цифрового анализа и обработки интерферограмм позволяет обнаружить и измерить деформации волнового фронта, которые визуально обнаружить невозможно. Величина деформации при этом находится на уровне $\lambda/100$.

На практике распределение интенсивности в интерференционной картине определяется выражением

$$I'' = \cos^2\pi(\nu y + \omega + \omega_R + \omega_{эт}), \quad (1)$$

где ν — пространственная частота интерференционных полос, вызванных наклоном; y — протяженность оптической поверхности по нормали к ребру клина; ω — разность хода в волновой мере, вызванная погрешностью исследуемой оптической поверхности, если образцовая поверхность погрешности не имеет.

В работе [4] исследованы условия расширения возможностей традиционной интерферометрии и сделан вывод, что их реализация возможна в случае создания интерферометра с дифракционным опорным волновым фронтом. С целью решения данной задачи авторами настоящей статьи осуществлен поиск новых идей и технических решений для их применения в современных условиях.

Интерферометры с дифрагированным эталонным (опорным) волновым фронтом, не требующие применения образцовых оптических элементов. Началом для разработки дифракционного интерферометра [6] стала, предложенная акад. В. Линником (1933 г.) схема интерферометра (рис. 3) с совмещенным ходом когерентных лучей и формированием дифракционного изображения в точечном отверстии. В данной схеме поперечная расфокусировка интерферометра для получения прямых интерференционных полос ограничена диаметром пятна рассеяния. Получаемые интерференционные картины имели невысокое качество и были зашумлены, что снижало точность измерений. Кроме того, для настройки интерферометра Линника при исследовании каждого оптического элемента требовалось использование микроподвижек с чувствительностью порядка 1 мкм, что усложняло и удорожало его практическую реализацию.

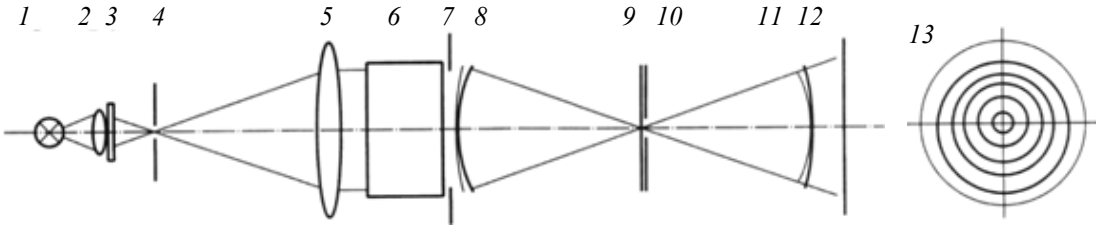


Рис. 3

При работе интерферометра Линника тест-объект „светящаяся точка“ *4* освещается системой *1—3* и фокусируется исследуемой системой (или деталью) *6* через выходной зрачок *7*, формирующий волновой фронт *8*, на плоскость светоделительного покрытия *10*, содержащего точечную диафрагму. Часть света, прошедшего полупрозрачное покрытие *10* пластины *9*, распространяется в направлении наблюдательной системы в виде рабочего сферического волнового фронта *12*, искаженного аберрациями. Часть света, испытавшего дифракцию на точечной диафрагме, распространяется в виде неискаженного сферического опорного волнового фронта *11*. В результате интерференции рабочего и опорного волновых фронтов формируются оптико-измерительное интерференционное изображение *13*.

Удовлетворительный контраст интерферограммы достигается, когда интенсивности рабочего и опорного фронтов близки по величине, что в данной схеме зависит не только от коэффициента пропускания покрытия (для измерения которого пришлось бы выполнять опера-

цию замены пластинки и повторную настройку схемы), но и от положения пятна рассеяния (изображения точечного тест-объекта) относительно точечной диафрагмы. Кроме того, смещение пятна относительно диафрагмы более чем на 0,5 диаметра пятна приводит к гашению опорного пучка лучей в интерферометре, что влечет за собой исчезновение интерференционных полос.

Итак, принцип действия дифракционного интерферометра основан на явлении дифракции на точечном отверстии в металлическом покрытии. Конструкция данного интерферометра может быть надежно воспроизведена в любых условиях. Основное достоинство рассмотренной классической схемы заключается в отсутствии образцовой оптической поверхности, но при этом имеется источник сферической опорной волны, используемый при контроле оптических поверхностей и систем наивысшей точности. Отметим, что подобный источник может применяться и для контроля образцовых элементов традиционных интерферометров. Принцип работы дифракционного интерферометра аналогичен работе традиционных интерферометров, в том числе используются различные средства повышения точности при измерительных отсчетах. Важно, что увеличение точности отсчетов влияет на повышение точности результата измерения (тогда как в традиционных интерферометрах это лишь точность отсчитывания суммарных деформаций рабочего волнового фронта, имеющего неустраненную ошибку, связанную с нестабильной ошибкой образцовой детали) [5]. Несмотря на недостатки такого интерферометра с совмещенными ветвями — сложности настройки, отличающейся от традиционной, невысокого качества интерференционной картины и определенных сложностях ее интерпретации, данный интерферометр демонстрирует новые возможности и перспективы современной интерферометрии, так как в нем отсутствуют погрешности изготовления образцовой поверхности, а также термические, гравитационные и вибрационные воздействия на опорный волновой фронт в процессе измерительного эксперимента [1—14].

Оптимальный размер точечного дифракционного отверстия составляет

$$d = 1{,}22\lambda/3A, \qquad (2)$$

где λ — длина волны применяемого в интерферометре излучения, A — апертура объектива осветительной системы прибора.

В работе [4] исследованы методы контроля качества изображения и предельные значения погрешностей оптических систем и деталей, составляющие менее $0{,}1\lambda$; также разработаны интерферометры с дифракционным образцовым волновым фронтом. В работах [1, 8—10] приведено обоснование возможности использования опорного волнового фронта, дифрагированного на точечном отверстии, который используется в качестве образцового и обеспечивает отклонение от сферической формы не более чем на 4 нм.

Неравноплечий дифракционный интерферометр. Высокую эффективность при контроле высокоточных оптических поверхностей и систем показал лазерный интерферометр с дифрагированным опорным волновым фронтом и разнесенными ветвями [7]. Авторами разработаны разновидности схем интерферометра с дифрагированным эталонным волновым фронтом. Этот прибор характеризуется традиционной методикой настройки и интерпретации интерференционной картины, обеспечивает высокое качество интерферограммы, гибкость при исследовании оптических систем и элементов с разными коэффициентами пропускания (отражения) от 98 % (зеркальные покрытия) до 0,15 % (просветляющие покрытия). Прибор может быть использован для оценки погрешностей изготовления оптических поверхностей и оценки качества объективов различного назначения, в том числе объективов микроскопов и космических телескопов.

В схеме интерферометра отсутствуют эталонные (точные) поверхности. Благодаря высокой когерентности лазерного излучения и его способности фокусироваться в пятно малых размеров в интерферометре в качестве образцового используется сферический волновой

фронт, образованный при дифракции сходящихся пучков на отверстии диаметром порядка 1—10 мкм.

Достоинство интерферограммы, полученной с помощью лазерного интерферометра с дифракционной волной сравнения, заключается в том, что все пучки лучей фильтруются при прохождении через дифрагирующее точечное отверстие, и поэтому интерференционное изображение отличается высоким качеством, чистотой и отсутствием шумов [2]. В результате получается четкая расшифровка интерферограммы при использовании программы ZEBRA MathOPTIX (или подобных программ распознавания и компьютерной обработки интерферограмм). Также обеспечивается высокая надежность распознавания интерференционных полос, стабильная повторяемость выходных числовых величин, что гарантирует правильность и точность конечных результатов контроля [2].

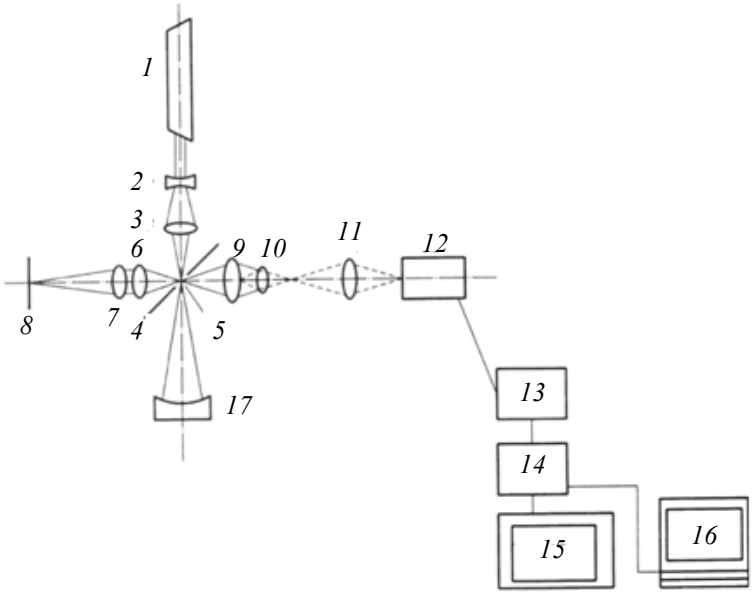


Рис. 4

Схема реализованного интерферометра с дифракционным опорным волновым фронтом показана на рис. 4. При работе интерферометра пучок лучей лазера *1* фокусируется осветительной системой *2*, *3* на точечное отверстие *5* в зеркальном покрытии наклонного плоского зеркала *4* в виде пятна рассеяния (обычно дифракционного кружка) диаметром ~10 мкм. Точечное отверстие является источником дифракционной сферической волны, которая в автоколлимации от исследуемой сферической поверхности фокусируется в виде пятна рассеяния, частично перекрывающего точечное отверстие, а чаще смещающего полученную интерференционную картину прямолинейных полос. Отразившись от зеркала, пучок через наблюдательный микроскоп *9—11* направляется на приемник изображения *12*. Часть излучения лазера, сфокусированного на точечное отверстие *5*, но не прошедшего через него, отражается от зеркала *4* в направлении осветительного сферического зеркала *8* и через объектив *6—7* фокусируется зеркалом на отверстии *5* в направлении плеча наблюдения *9—11* [2, 7]. При этом на отверстии формируется вторая дифракционная сферическая волна, фронт которой используется в качестве опорного. В результате сложения этой волны с рабочей волной, сформированной контролируемой поверхностью, возникает интерференционная картина в совмещенных световых пучках, распространяющихся от точечного отверстия в направлении приемника изображения. Рассмотренный вариант схемы интерферометра имеет важную особенность: данный интерферометр — полностью безэталонный, так как не содержит ни одной образцовой оптической поверхности, а также отсутствуют поверхности, погрешности изготовления которых дополняют погрешности измерения [1].

При наличии в схеме контроля значительных вибраций, а также при необходимости регулярной работы на интерферометре используется персональный компьютер *16* с видеосистемой *12—14*. При этом время экспозиции t_e каждого видеокадра рассчитывается по формуле

$$t_e = 1/10F_v,$$

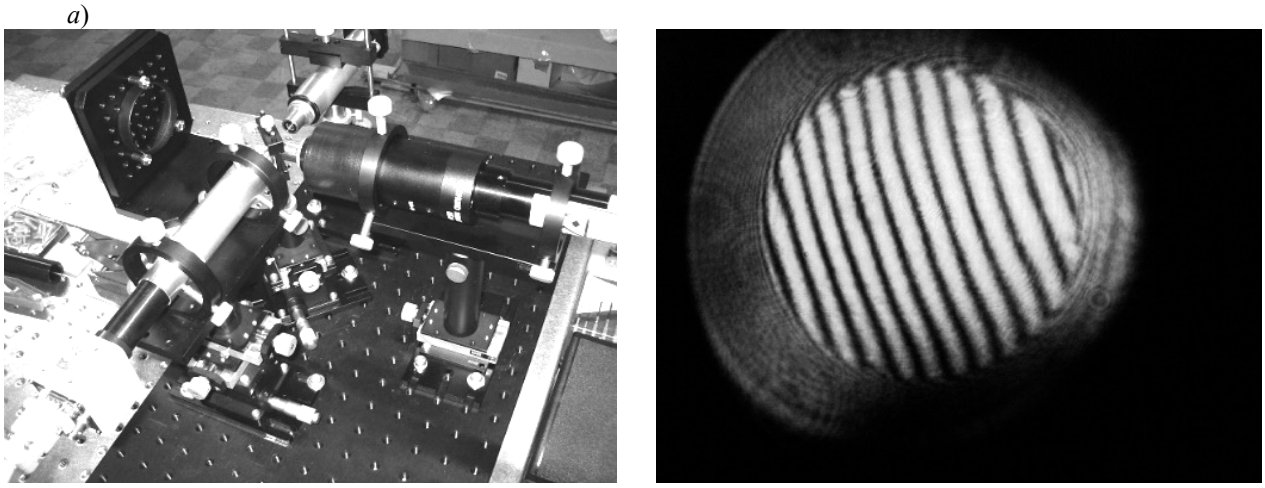
где F_v — частота вибрации.

Это необходимо для предотвращения размывания полос из-за вибрации.

На рис. 5, *а* показаны пример реализации интерферометра с дифрагированным опорным фронтом, собранного на базе узлов компании „Edmund Optics“ (США) и АО „ЛОМО“ (Россия) и полученная интерферограмма [1]. Интерферометр используется для исследования на виброизолирующем интерференционном столе прецизионного сферического зеркала на основе PDI-интерферометра.

Второй вариант интерферометра с дифрагированным опорным фронтом и автоколлимационным осветительным плечом показан на рис. 5, *б*. Основная особенность интерферометра — высокое качество полученной интерферограммы, что способствует наиболее полному использованию точностных возможностей прибора. Полученное телевизионное изображение движущейся интерференционной картины записывается в видеопамять, а затем покадрово исследуется и выполняется расшифровка изображения неподвижной интерферограммы [7]. В результате изображение, воспроизводимое с одиночного кадра, не будет зависеть от вибраций.

а)



б)

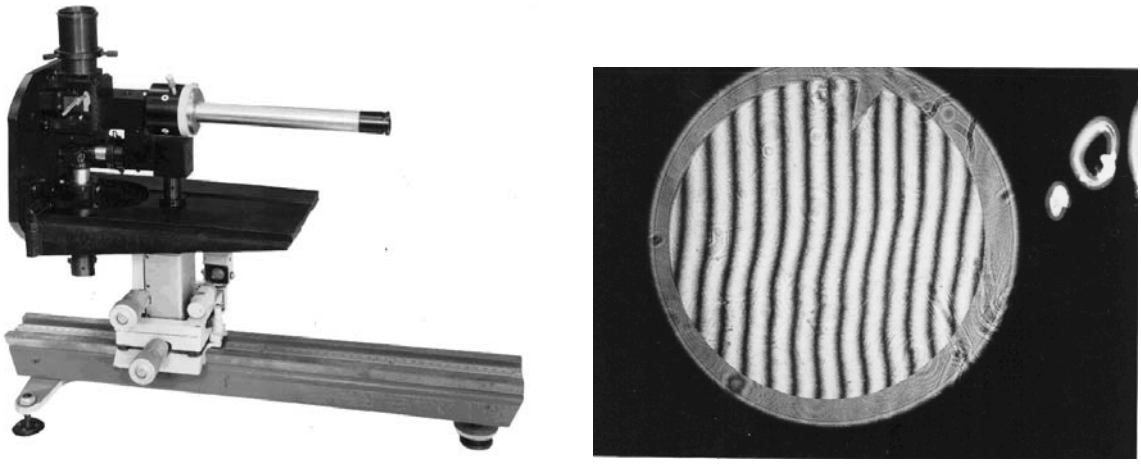


Рис. 5

Твердотельный дифракционный интерферометр. Для самоконтроля и автокоррекции телескопа на орбите необходим виброустойчивый твердотельный дифракционный интерферометр (рис. 6) в форме моноблока, простой и прецизионный. Данный интерферометр доступен, экономичен и может использоваться в заводской, научной и учебной лабораториях. Схема интерферометра содержит осветительную систему *2—4* с лазером *1* и компонент-полусферу *5* с зеркальным покрытием *6*. Свет отражается от зеркального покрытия *7* с дифрагирующим субмикронным отверстием *10* и проецируется на исследуемую сферическую поверхность *12*, изображение которой формируется в наблюдательном микроскопе и регистрируется видеокамерой *11*.

Прибор имеет следующие достоинства: высокую точность измерений; нерасстраиваемость; компактность и легкость; нечувствительность к вибрации, термическим и гравитационным воздействиям; возможность применения модуля данного интерферометра при конструировании и изготовлении дифракционного интерферометра по блочно-модульному методу; возможность выполнения прибора в виде монолита, устойчивого к вибрации. Направления использования дифракционных лазерных интерферометров описаны в работе [11].

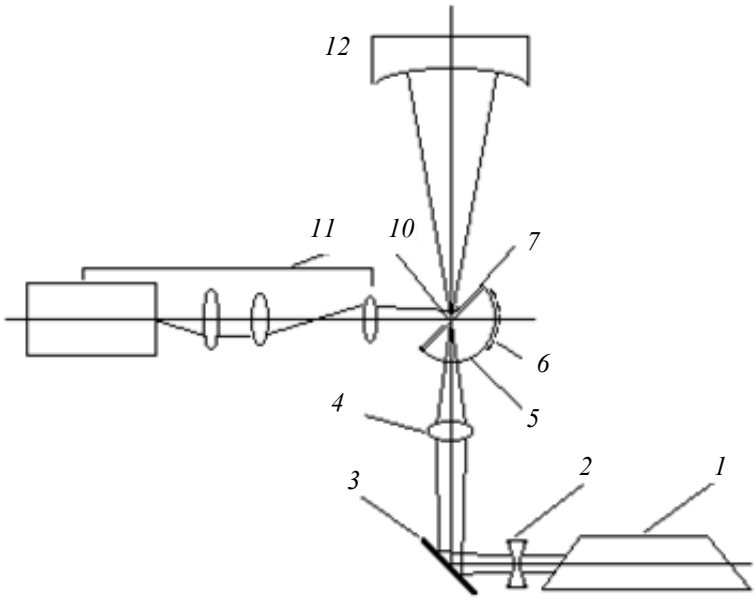


Рис. 6

Трехплечий дифракционный интерферометр. Авторами предлагается простой и экономичный вариант дифракционного интерферометра — трехплечий интерферометр (рис. 7). В схеме интерферометра использован полупроводниковый лазер *1*, расширительная линза *2* для заполнения зрачка осветительного объектива *3* и субмикронное отверстие *4* в покрытии плоской грани для создания опорного волнового фронта *6*. Центральным модулем является плоскопараллельная пластина *5* толщиной 0,14 мм (покровное стекло). Точечное отверстие *4* в непрозрачном металлическом покрытии служит источником дифракционной сферической волны *6*. На схеме показаны также фрагменты опорных фронтов в рабочем плече *7* с исследуемым объектом *8* и в плече наблюдения *9*. Таким образом, возникающая в этой схеме интерференционная картина есть результат сложения опорной волны, формируемой при дифракции на точечном отверстии, и рабочей волны, отраженной от контролируемой поверхности [12]. Диаметр отверстия, генерирующего эталонный волновой фронт, рассчитывается по формуле (2). Приемник изображения *10—13* содержит видеокамеру, подключенную к персональному компьютеру с программой обработки интерферограмм „Tiger“, расчета и статистической обработки массива результатов измерения.

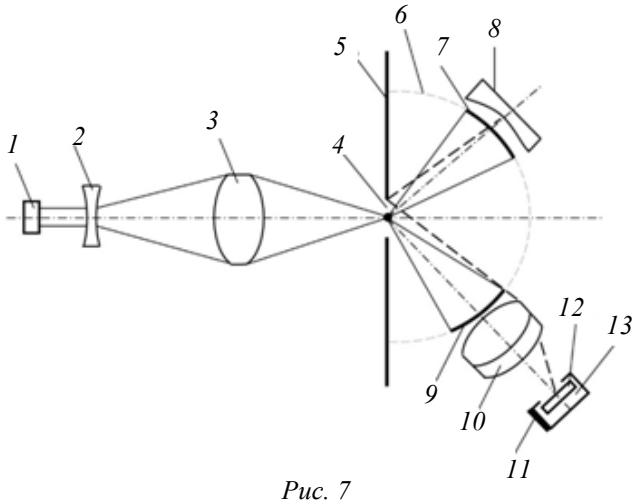


Рис. 7

Данный интерферометр имеет простую по сравнению с прототипами схему и конструкцию и прост в юстировке. Возможно его конструктивное исполнение в варианте твердотельного моноблока, включающего полупроводниковый лазер, матричную камеру и процессор.

Достигаемые преимущества: виброустойчивость; нерасстраиваемость; экономичность в разработке и производстве; целесообразность серийного производства; доступная стоимость и перспектива широкого применения во множестве областей, таких как добыча нефти, газа и других ресурсов, космос, сельское хозяйство, медицина, наука, образование, промышленность, связь.

Заключение. Приведено краткое обоснование факторов современной прецизионной интерферометрии, указывающих на необходимость развития направления дифракционных интерферометров.

Приведен обзор схем интерферометров с дифрагированным эталонным волновым фронтом и обоснованы их достоинства. Данные приборы отличаются предельно низкими погрешностями, простотой конструкции и экономичностью в производстве. Показан комплекс дифракционных интерферометров, разработанных и исследованных с участием авторов настоящей статьи. Значительный интерес представляет твердотельный дифракционный интерферометр, его отличают высокая виброусточивость и надежность в работе. Интерферометр обеспечивает измерение формы прецизионных оптических поверхностей с точностью на уровне 0,02λ и выше, что важно для спектрометрии и астрономии, микроскопии, в технологиях микроэлектроники. Приведена схема дифракционного интерферометра, имеющего три плеча, который отличается, при высокой точности, пониженной виброчувствительностью, а также простой и экономичной конструкцией. Приборы данного класса используют опорный волновой фронт, который формируется с пренебрежимо малыми погрешностями в результате дифракции лазерного пучка, сфокусированного на точечном отверстии в металлическом экране диаметром менее 0,3 от кружка Эри.

Показана перспективность развития данного направления в сочетании с современными достижениями для радикального снижения погрешностей, повышения чувствительности и воспроизводимости измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирилловский В. К.* Современные оптические исследования и измерения. СПб—М.—Краснодар: Изд-во „Лань“, 2022. 303 с.

2. *Кирилловский В. К., Точилина Т. В.* Методы исследования и контроля качества оптических систем: Учеб. пособие. СПб: НИУ ИТМО, 2012. 125 с.

3. *Кирилловский В. К., Точилина Т. В.* Оптические измерения. Часть 5. Аберрации и качество изображения: Учеб. пособие. СПб: НИУ ИТМО, 2019. 94 с.

4. *Иванова Т. А., Кирилловский В. К.* Проектирование и контроль оптики микроскопов. Л.: Машиностроение, 1984. 231 с.

5. *Кирилловский В. К., Вознесенский Н. Б., Ли К. Х., Гуров И. П.* Сравнительный анализ интерферограмм, полученных на интерферометре с дифракционной волной сравнения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2004. № 13. С. 198—203.

6. *Кирилловский В. К., Ле Зуй Туан.* Разработка алгоритмического и программного обеспечения для аппаратуры контроля качества изображения оптических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2007. Т. 50, № 7. С. 52—56.

7. *Гаврилов Е. В., Кирилловский В. К.* Современные кинообъективы и их контроль // Оптич. журн. 2005. Т. 72. № 10. С. 47—56.

8. *Кирилловский В. К., Вознесенский Н. Б.* Высокоапертурный дифракционный интерферометр с унифицированным опорным фронтом // Междунар. оптич. конгресс „Оптика-XXI век“: Сб. СПб, 2000.

9. *Lee Kyeong-Hee, Voznesensky N. B., Kirillovsky V. K.* Principle of certification of high precision optical parts and systems based on diffraction interferometer // Proc. SPIE 5252, Optical Fabrication, Testing, and Metrology, 26 Febr. 2004. DOI: 10.1117/12.512231.

10. *Kirillovsky V. K., Voznesensky N. B., Trouchine M. M.* The interferometer with diffraction on dot aperture for testing of the shape errors of precise surfaces // Proc. SPIE 5399, Laser-Assisted Micro- and Nanotechnologies 2003. DOI: 10.1117/12.552324.

11. *Кирилловский В. К., Точилина Т. В.* Оптические измерения. Часть 4. Оценка качества оптического изображения и измерение его характеристик: Учеб. пособие. СПб: Ун-т ИТМО, 2018. 86 с.

12. *Богданов И. Ю., Гаврилов Е. В., Кирилловский В. К.* Особенности контроля объектива для формирования наноструктур // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2008. № 58. С. 26—30.

13. *Kirillovsky V. K.* Diffraction Reference Wavefront Laser Interferometer // Proc. SPIE 1751, Miniature and Micro-Optics: Fabrication and System Applications II. 1992. Vol. 5, 1751. P. 197—200.

14. *Кирилловский В. К.* Изучение принципов современной прецизионной интерферометрии на примере дифракционных интерферометров // Междунар. оптич. конгресс „Оптика-XXI век“: Сб. СПб, 2000.

Сведения об авторах

Владимир Константинович Кирилловский — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, Центр прикладной оптики; E-mail: vkkir@mail.ru

Татьяна Вячеславовна Точилина — канд. техн. наук; Университет ИТМО, Центр прикладной оптики; ст. преподаватель; E-mail: tvtochilina@itmo.ru

Поступила в редакцию 20.11.23; одобрена после рецензирования 28.11.23; принята к публикации 14.01.24.

REFERENCES

1. Kirillovsky V.K. *Sovremennyye opticheskiye issledovaniya i izmereniya* (Modern Optical Research and Measurements), St. Petersburg, Moscow, Krasnodar, 2022, 303 p. (in Russ.)
2. Kirillovsky V.K., Tochilina T.V. *Metody issledovaniya i kontrolya kachestva opticheskikh system* (Methods for Research and Quality Control of Optical Systems), St. Petersburg, 2012, 125 p. (in Russ.)
3. Kirillovsky V.K., Tochilina T.V. *Opticheskiye izmereniya. Chast' 5. Aberratsii i kachestvo izobrazheniya* (Optical Measurements. Part 5: Aberrations and Image Quality), St. Petersburg, 2019, 94 p. (in Russ.)
4. Ivanova T.A., Kirillovsky V.K. *Proyektirovaniye i kontrol' optiki mikroskopov* (Design and Control of Microscope Optics), Leningrad, 1984, 231 p. (in Russ.)
5. Kirillovsky V.K., Voznesensky N.B., Lee K.H., Gurov I.P. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2004, no. 13, pp. 198–203. (in Russ.)
6. Kirillovsky V.K., Le Duy Tuan. *Journal of Instrument Engineering*, 2007, no. 7(50), pp. 52–56. (in Russ.)
7. Gavrilov E.V., Kirillovskiĭ V.K. *Journal of Optical Technology*, 2005, no. 10(72), pp. 773–780.
8. Kirillovsky V.K., Voznesensky N.B. *Optika-XXI vek* (Optics-XXI Century), Collection of the International Optical Congress, St. Petersburg, 2000. (in Russ.)
9. Lee Kyeong-Hee, Voznesensky N.B., Kirillovsky V.K. *Proc. SPIE, Optical Fabrication, Testing, and Metrology*, 26 February 2004, vol. 5252, https://doi.org/10.1117/12.512231.
10. Kirillovsky V.K., Voznesensky N.B., Trouchine M.M. *Proc. SPIE, Laser-Assisted Micro- and Nanotechnologies*, 2 April 2004, vol. 5399, https://doi.org/10.1117/12.552324.

11. Kirillovsky V.K., Tochilina T.V. *Opticheskiye izmereniya. Chast' 4. Otsenka kachestva opticheskogo izobrazheniya i izmereniye yego kharakteristik* (Optical Measurements. Part 4. Optical Image Quality Assessment and Measurement of its Characteristics), St. Petersburg, 2018, 86 p. (in Russ.)
12. Bogdanov I.Yu., Gavrilov E.V., Kirillovsky V.K. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2008, no. 58, pp. 26–30. (in Russ.)
13. Kirillovsky V.K. *Proc. SPIE, Miniature and Micro-Optics: Fabrication and System Applications II*, 1992, vol. 1751, pp. 197–200.
14. Kirillovsky V.K. *Optika-XXI vek* (Optics-XXI Century), Collection of the International Optical Congress, St. Petersburg, 2000. (in Russ.)

Data on authors

Vladimir K. Kirillovsky — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Applied Optics Center; E-mail: vkkir@mail.ru

Tatiana V. Tochilina — PhD; ITMO University, Applied Optics Center; Senior Lecturer; E-mail: tvtochilina@itmo.ru

Received 20.11.23; approved after reviewing 28.11.23; accepted for publication 14.01.24.

УДК 681.787
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-268-275

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТА В ПЛОСКОСТИ УСТАНОВКИ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

Е. Е. Майоров[1*], В. В. Курлов[1], Ю. М. Бородянский[2], А. В. Дагаев[3], И. С. Таюрская[4]

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия*
[*] *majorov_ee@mail.ru*
[2] *Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Россия*
[3] *Ивангородский гуманитарно-технический институт (филиал) Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, Ивангород, Россия*
[4] *Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики, Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. Исследованы особенности функционирования экспериментальной установки, основанной на применении двухчастотного лазерного излучения по методу двух экспозиций голографической интерферометрии. Установка предназначена для определения величины перемещения объекта вдоль оси *OX* в плоскости его установки. Метод голографической интерферометрии обеспечивает длительное хранение информации на фотоносителях, позволяет добиться максимального контраста интерференционной картины и качественно реконструировать волновые фронты. Представлены внешний вид, оптическая схема и технические характеристики экспериментальной установки. Получены выражения для определения величины перемещения объекта и погрешностей измерения для каждого перемещения. Приведены изображения, подтверждающие существование интерференционного поля для каждого перемещения.

Ключевые слова: *когерентная оптика, голографическая интерферометрия, длина волны излучения, апертура, погрешность измерения, волновой фронт, поляризационный светоделитель, коллиматор*

Ссылка для цитирования: *Майоров Е. Е., Курлов В. В., Бородянский Ю. М., Дагаев А. В., Таюрская И. С.* Экспериментальное определение величины перемещения объекта в плоскости установки методом голографической интерферометрии // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 268—275. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-268-275.

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF AN OBJECT DISPLACEMENT MAGNITUDE IN THE INSTALLATION PLANE USING THE HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY METHOD

E. E. Maiorov[1*], V. V. Kurlov[1], Yu. M. Borodyansky[2], A. V. Dagaev[3], I. S. Tayurskaya[4]

[1] *St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia*
**majorov_ee@mail.ru*
[2] *Bonch-Bruevich St. Petersburg State University of Telecommunications, St. Petersburg, Russia*
[3] *Ivangorod Humanitarian and Technical Institute (branch of St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation), Ivangorod, Russia*
[4] *St. Petersburg University of Management Technologies and Economics, St. Petersburg, Russia*

Abstract. The features of the functioning of an experimental setup based on application of two-frequency laser radiation using the method of two exposures of holographic interferometry are studied. The installation is intended to determine the amount of movement of an object along the OX axis in the plane of its installation. The holographic interferometry method ensures long-term storage of information on photo carriers, allows for maximum contrast of the interfe-

© *Майоров Е. Е., Курлов В. В., Бородянский Ю. М., Дагаев А. В., Таюрская И. С., 2024*

rence pattern and high-quality reconstruction of wave fronts. The appearance, optical design and technical characteristics of the experimental setup are presented. Expressions are obtained to determine an object displacement magnitude and measurement errors for each displacement. Images are shown confirming the existence of an interference field for each displacement.

Keywords: coherent optics, holographic interferometry, radiation wavelength, aperture, measurement error, wavefront, polarization beam splitter, collimator

For citation: Maiorov E. E., Kurlov V. V., Borodyansky Yu. M., Dagaev A. V., Tayurskaya I. S. Experimental determination of an object displacement magnitude in the installation plane using the holographic interferometry method. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 268—275 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-268-275.

Введение. Оптические измерения — высокоточный и достоверный способ получения информации, обеспечивающий решение различных задач в микроэлектронике, оптике и метрологии. В научной практике для изучения движений веществ в различном агрегатном состоянии используется широкий класс методов контроля и технических средств. Ведущее место занимают методы когерентной оптики, среди которых особого внимания заслуживают методы и средства голографической интерферометрии [1—8].

Анализ научной литературы показал, что голографическая интерферометрия обладает уникальными возможностями для исследования объектов в динамических процессах [9, 10]. Технические средства голографической интерферометрии позволяют проводить измерения в статистических и динамических процессах, анализировать волновые фронты в разные моменты времени, получать данные качественного и количественного характера о структуре интерференционных полей, а также воспроизводить трехмерное изображение объекта [11, 12].

На сегодняшний день в голографической интерферометрии достигнуты определенные успехи при использовании метода двух экспозиций. Этот метод обеспечивает длительное хранение информации на фотоносителях, прост в реализации, позволяет добиться максимального контраста интерференционной картины и качественно реконструировать волновые фронты [13, 14]. Получены высокие результаты в методике записи голографической интерферограммы, осуществлен переход на новый уровень при количественном и качественном объяснении экспериментальных результатов с использованием компьютерных технологий, а также достигнуты успехи в создании приборов и комплексов оптической обработки записанных изображений на фоторегистрирующей среде [15, 16].

На основе анализа существующих решений по извлечению данных из фоторегистрирующих сред можно выделить группу приборов и комплексов, которые основаны на преобразовании фазовых параметров интерференционного поля в фазовые параметры электрического сигнала, что делает эти технические средства высокоточным и информативным инструментом получения информации [17, 18]. Такие средства имеют очень малую погрешность измерений при достаточно большом диапазоне определяемых величин.

Оптические и оптико-электронные приборы и комплексы, в основе которых лежат методы голографической интерферометрии, успешно используются в машиностроении, медицине, биологии, научных исследованиях для контроля и диагностики материалов [18, 19]. В последние годы российским ученым удалось решить задачу настройки интерференционных полос в технике двухопорной голографии. Конструктивно эти технические средства выполнены таким образом, что при использовании второго опорного пучка воспроизведение волнового фронта не изменяется, а значит, точность измерений при считывании информации не снижается. Еще одна важная особенность этих приборов и комплексов заключается в том, что в процессе измерений появляется возможность контролировать большие величины смещений исследуемых объектов.

Представляет интерес исследование различных перемещений объекта не только при нормальном перемещении, но и в плоскости экспериментальной установки. В настоящей

статье исследованы особенности функционирования экспериментальной установки, основанной на методе двух экспозиций голографической интерферометрии и предназначенной для определения величины перемещения объекта вдоль оси *OX* в плоскости его установки. Для подтверждения интерференционной картины получены результаты наблюдений интерференционного поля для поступательного движения объекта с плоской поверхностью на 150, 600 и 1000 мкм.

Метод и объект исследования. В качестве объекта исследования использовалась медная пластина с размерами записывающей плоскости 90×90 мм^2. Для получения интерферограмм применялись фотографические высокоразрешающие пластинки (голографические фотоматериалы на основе галогенидов серебра) U08M.

Экспериментальная голографическая интерференционная установка, внешний вид которой показан на рис. 1, используется для исследования поступательных движений объекта в своей плоскости и в направлении, перпендикулярном плоскости, а также возможности вращения вокруг двух взаимно перпендикулярных осей.

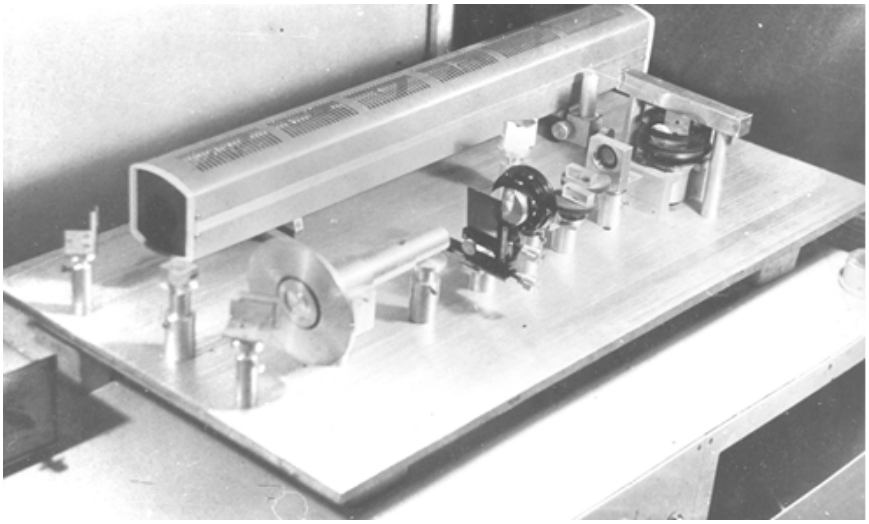


Рис. 1

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 2, где *1* — лазер; *2*, *5*, *5'*, *11* — зеркала; *3* — блок формирования двухчастотного излучения; *4*, *4'* — светоделители; *6*, *7* — акустооптические модуляторы; *8*, *9* — ВЧ-генераторы; *10*, *16* — полуволновые пластинки; *12*, *14* — оборачивающие призмы; *13* — голограмма; *15* — интерферометр сдвига; *17*, *18* — поляроиды; *19* — линза; *20*, *21* — фотоприемники; *22*, *23* — усилители; *24* — измеритель разности фаз; блоки, выделенные на схеме пунктиром, — дублирующие элементы.

Воспроизведение волновых фронтов, записанных на фотопластинке, осуществлялось с использованием излучения лазера *1* (ЛГ–79). Принцип гетеродинной интерферометрии был реализован с применением двухчастотного излучения, формируемого блоком *3*. Последний построен на основе интерферометра Маха — Цендера, в плечах которого размещены акустооптические модуляторы *6* и *7* (использовались устройства типа МЛ–201). Модуляторы возбуждались напряжением ВЧ-генераторов *8* и *9*. Сформированное двухчастотное излучение освещало голограмму *13*.

Для проведения фазовых измерений необходимо наличие двух каналов — опорного и измерительного. В этой схеме сигнал опорного канала формировался из света, прямо прошедшего интерферограмму 13. Такой подход целесообразно использовать в случае, когда геометрия освещения фотопластинки в процессе эксперимента остается неизменной. В противоположном случае для формирования опорного сигнала использовалось излучение, отраженное от светоделителя *11*. Измерительный канал формировался в направлении распространения света, дифрагированного на интерферограмме.

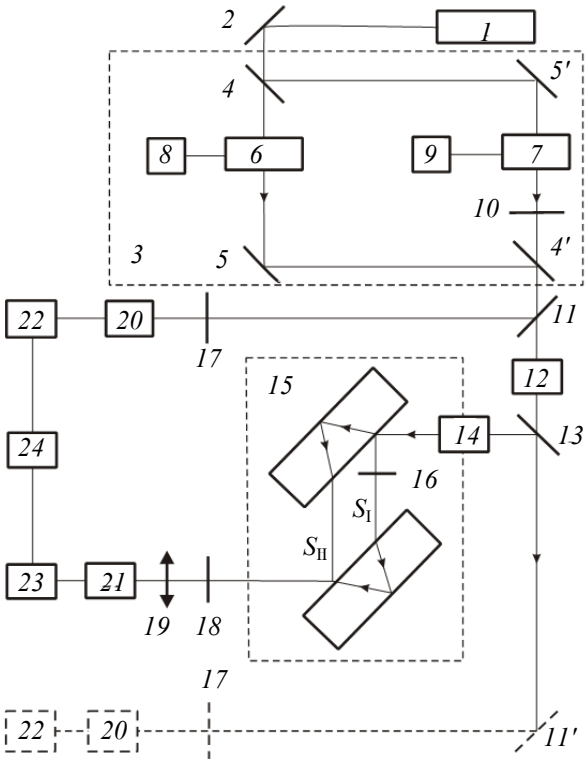


Рис. 2

В целях обеспечения повышенной стабильности параметров возбуждающего сигнала в ВЧ-генераторах использовались кварцевые резонаторы с частотами $f_8 = 42\,002$ кГц и $f_9 = 42\,105$ кГц.

Электрические сигналы с выходов фотоприемников *20* и *21* обоих каналов после усиления подаются на входы измерителя разности фаз (использовался прибор Ф2–16). Резонансные усилители *22*, *23* настроены на частоту интерференционного сигнала 103 кГц.

При сканировании интерферограммы фаза информационного сигнала изменяется согласно изменению смещения. Фаза опорного сигнала не меняется независимо от величины и ориентации контролируемого объекта, поэтому показания измерителя разности фаз изменяются в соответствии с изменением вектора смещения.

Технические параметры экспериментальной установки

Источник излучения	He—Ne-лазер (ЛГ-79)
Длина волны излучения, мкм	0,6328
Диапазон измерений смещений, мкм	1500…0,01
Апертура освещения, рад	0,1
Погрешность измерений, мкм	0,001

Экспериментальные результаты. Интерферограммы для наиболее характерного перемещения объекта в плоскости его установки представлены на рис. 3: *а*—*в* — перемещение на величину *d*, равную 150, 600 и 1000 мкм соответственно.

Записи интерферограмм осуществлялись с помощью металлического столика с микрометрическими подвижками. В процессе воспроизведения голографическая пластинка U08M освещалась лазерным лучом, диаметр которого равен 1 мм, при этом наблюдались интерференционные картины. Как видно по фотографиям, интерференционные поля были классическими для данного вида перемещения.

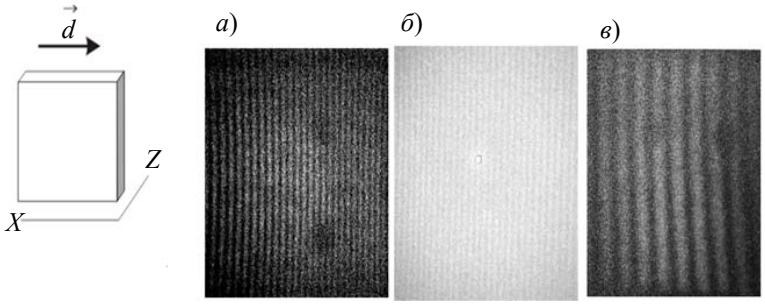


Рис. 3

На фоторегистрирующей пластинке U08M были записаны линейные перемещения исследуемого объекта. Для независимого контроля использовался датчик линейных перемещений 1МИГ с ценой деления 1 мкм.

Величина перемещения определялась по следующим формулам:

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha_1; \quad \Phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha_2, \tag{1}$$

где α_1, α_2 — углы освещения; Φ_1, Φ_2 — параметры разности фаз, λ — длина волны излучения.

Для объяснения существования интерферограмм была решена система уравнений (1) и определена величина перемещения

$$d = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)}. \tag{2}$$

Экспериментальные результаты определения величины перемещения объекта на 150, 600 и 1000 мкм приведены на рис. 4, *а*—*в*.

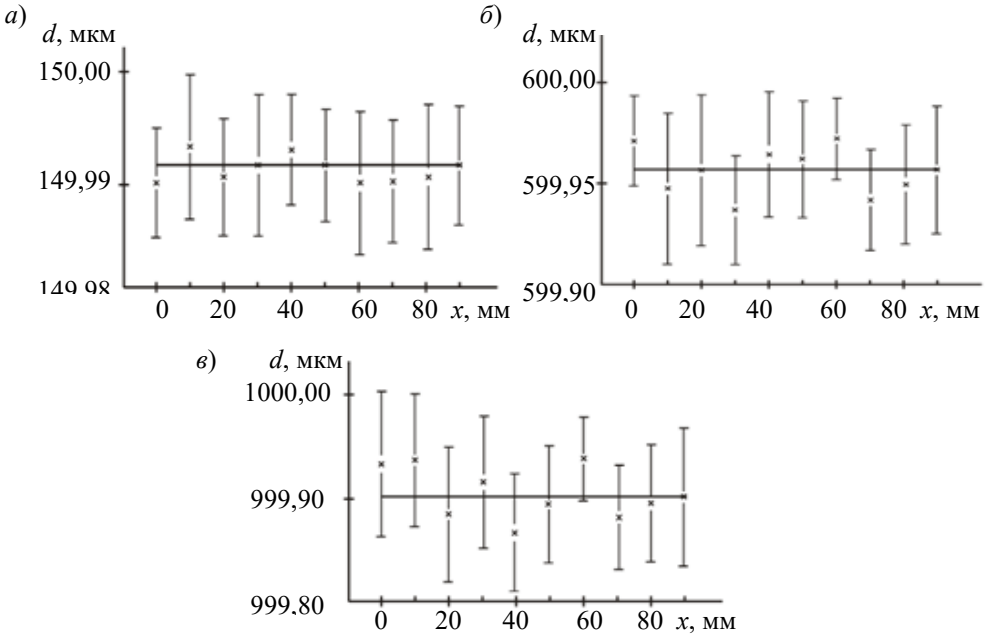


Рис. 4

Приведенные результаты хорошо согласуются с данными датчика линейных перемещений 1МИГ. Как следует из приведенных графиков, погрешность от среднего значения для $d = 150$ мкм не превышает 0,01 мкм, для $d = 600$ мкм — 0,05 мкм, для $d = 1000$ мкм — 0,1 мкм.

Заключение. Реализована возможность перемещения поляризационного светоделителя для изменения угла освещения и получены интерферограммы перемещений объекта в плоскости установки на 150, 600 и 1000 мкм. Получено выражение для величины перемещения. Анализ графиков показывает, что погрешности измерений для каждого перемещения различны. Результаты исследования могут представлять интерес для оптико-физических измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В.* Голографическая интерферометрия. М.: Наука, 1977. 340 с.

2. *Островский Ю. И., Щепинов В. П., Яковлев В. В.* Голографические интерференционные методы измерения деформаций. М.: Наука, 1988. 248 с.

3. *Коломийцев Ю. В.* Интерферометры. Л.: Машиностроение, 1976. 296 с.

4. *Котов И. Р., Майорова О. В., Прокопенко В. Т.* Измерение локальных наклонов диффузно отражающих объектов при использовании метода голографической интерферометрии. // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53, № 4. С. 32—34.

5. *Вест Ч.* Голографическая интерферометрия. М.: Мир, 1982. 504с.

6. *Малакара Д.* Оптический производственный контроль / Пер. с англ.; Под ред. *А. Н. Соснова.* М.: Машиностроение, 1985. 340 с.

7. *Майоров Е. Е., Бородянский Ю. М., Гулиев Р. Б., Дагаев А. В., Курлов В. В., Таюрская И. С.* Исследование оптических поверхностей плосковыпуклых линз экспериментальной интерференционной установкой с дифрагированным опорным волновым фронтом // Научное приборостроение. 2023. Т. 33, № 1. С. 43—53.

8. *Майоров Е. Е., Арефьев А. В., Бородянский Ю. М., Гулиев Р. Б., Дагаев А. В., Пушкина В. П.* Математическое моделирование выходного сигнала при разной геометрии апертур фотоприемников интерференционной системы анализа интерферограмм // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 4. С. 313—319. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-4-313-319.

9. *Майоров Е. Е.* Исследование выходного интерференционного сигнала в фазоизмерительной системе // Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: Сб. докл. 4-й Всерос. науч. конф., 18—22 апр. 2023 г. СПб: ГУАП, 2023. С. 56—60.

10. *Майоров Е. Е.* К вопросу о погрешности измерений в сдвиговой интерферометрии // Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: Сб. докл. 4-й Всерос. науч. конф., 18—22 апр. 2023 г. СПб: ГУАП, 2023. С. 61—64.

11. *Майоров Е. Е.* Исследование сложных форм поверхностей когерентно ограниченной во времени системой // Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: Сб. докл. 4-й Всерос. науч. конф., 18—22 апр. 2023 г. СПб: ГУАП, 2023. С. 65—68.

12. *Майоров Е. Е., Костин Г. А., Черняк Т. А.* Реализация метода спекл-фотографии для контроля диффузно отражающих поверхностей объектов // Научное приборостроение. 2023. Т. 33, № 2. С. 75—83.

13. *Майоров Е. Е., Костин Г. А., Черняк Т. А*. Экспериментальная измерительная система для контроля поверхностей корпуса воздушного судна // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 430—436. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-430-436.

14. *Костин Г. А., Черняк Т. А., Майоров Е. Е.* Экспериментальное исследование фазоизмерительной установки обработки спеклограмм // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2023. Вып. 4. С. 109—112. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-4-109-112.

15. *Майоров Е. Е., Пушкина В. П., Арефьев А. В., Курлов В. В., Гулиев Р. Б., Таюрская И. С*. Контроль плоской поверхности отражателя на основе SiO_2 + H_2O + ZrO_2 экспериментальной установкой, построенной на базе интерферометра Физо // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2023. Вып. 4. С. 132—137. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-4-132-137.

16. *Майоров Е. Е., Черняк Т. А., Костин Г. А.* Применение высокочувствительных фотоматериалов на основе галогенидов серебра для исследования влияния отклонений подложек спеклограмм на результаты измерений // Приборы. 2023. № 5. (275). С. 51—54.

17. *Майоров Е. Е., Бородянский Ю. М., Курлов В. В., Таюрская И. С., Пушкина В. П., Гулиев Р. Б.* Пространственное микросканирование поверхности плоскопараллельных стеклянных пластинок интерференционным методом // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 8. С. 688—695. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-688-695.

18. *Майоров Е. Е., Арефьев А. В., Курлов В. В., Пушкина В. П., Бородянский Ю. М., Таюрская И. С.* Экспериментальное исследование косметических масел низкокогерентным интерференционным радаром // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2023. Вып. 7. С. 585—590. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-585-586.

19. *Майоров Е. Е., Костин Г. А., Черняк Т. А., Баранов Н. Е.* Использование излучения с малой временной когерентностью для исследования поверхности щелевых закрылок на крыле самолета // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2023. Вып. 7. С. 577—581. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-577-578.

Сведения об авторах

Евгений Евгеньевич Майоров — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра прикладной математики; E-mail: majorov_ee@mail.ru

Виктор Валентинович Курлов — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра инноватики и интегрированных систем качества; E-mail: vitek543@rambler.ru

Юрий Михайлович Бородянский — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, кафедра безопасности информационных систем; E-mail: borodyanskyum@gmail.com

Александр Владимирович Дагаев — канд. техн. наук, доцент; Ивангородский гуманитарно-технический институт (филиал) Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, кафедра математики, информатики и информационных таможенных технологий; E-mail: adagaev@list.ru

Ирина Соломоновна Таюрская — канд. экон. наук, доцент; Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики, кафедра информационных технологий и математики; E-mail: tis_ivesep@mail.ru

Поступила в редакцию 19.10.2023; одобрена после рецензирования 16.11.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. Ostrovsky Yu.I., Butusov M.M., Ostrovskaya G.V. *Golograficheskaya interferometriya* (Holographic Interferometry), Moscow, 1977, 340 p. (in Russ.)
2. Ostrovsky Yu.I., Shchepinov V.P., Yakovlev V.V. *Golograficheskiye interferentsionnyye metody izmereniya deformatsiy* (Holographic Interference Methods for Strain Measurement), Moscow, 1988, 248 p. (in Russ.)
3. Kolomiytsev Yu.V. *Interferometry* (Interferometers), Leningrad, 1976, 296p. (in Russ.)
4. Kotov I.R., Mayorova O.V., Prokopenko V.T. *Journal of Instrument Engineering*, 2010, no. 4(53), pp. 32–34. (in Russ.)
5. Vest Ch.M. *Holographic Interferometry*, NY, Wiley, 1979.
6. Malacara D., ed., *Optical Shop Testing*, Wiley-Interscience, A John Wiley & Sons, Inc., 2007.
7. Maiorov E.E., Borodyansky Y.M., Guliyev R.B., Dagaev A.V., Kurlov V.V., Tayurskaya I.S. *Nauchnoe Priborostroenie*, 2023, no. 1(33), pp. 43–53. (in Russ.)
8. Maiorov E.E., Arefiev A.V., Borodyansky Yu.M., Guliyev R.B., Dagaev A.V., Pushkina V.P. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 4(66), pp. 313–319, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-4-313-319. (in Russ.)
9. Maiorov E.E. *Modelirovaniye i situatsionnoye upravleniye kachestvom slozhnykh sistem* (Modeling and Situational Quality Management of Complex Systems), Collection of Reports of the Fourth All-Russian Scientific Conference, St. Petersburg, April 18–22, 2023, pp. 56–60. (in Russ.)
10. Maiorov E.E. *Modelirovaniye i situatsionnoye upravleniye kachestvom slozhnykh sistem* (Modeling and Situational Quality Management of Complex Systems), Collection of Reports of the Fourth All-Russian Scientific Conference, St. Petersburg, April 18–22, 2023, pp. 61–64. (in Russ.)
11. Maiorov E.E. *Modelirovaniye i situatsionnoye upravleniye kachestvom slozhnykh sistem* (Modeling and Situational Quality Management of Complex Systems), Collection of Reports of the Fourth All-Russian Scientific Conference, St. Petersburg, April 18–22, 2023, pp. 65–68. (in Russ.)
12. Maiorov E.E., Kostin G.A., Chernyak T.A. *Nauchnoe Priborostroenie*, 2023, no. 2(33), pp. 75–83. (in Russ.)
13. Maiorov E.E., Kostin G.A., Chernyak T.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 5(66), pp. 430–436, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-430-436. (in Russ.)
14. Kostin G.A., Chernyak T.A., Maiorov E.E. *News of the Tula state university. Technical sciences*, 2023, no. 4, pp. 109–112, DOI: 10.24412/2071-6168-2023-4-109-112. (in Russ.)
15. Maiorov E.E., Pushkina V.P., Arefiev A.V., Kurlov V.V., Guliyev R.B.O., Tayurskaya I.S. *News of the Tula state university. Technical sciences*, 2023, no. 4, pp. 132–137, DOI: 10.24412/2071-6168-2023-4-132-137. (in Russ.)
16. Maiorov E.E., Chernyak T.A., Kostin G.A. *Instruments*, 2023, no. 5(275), pp. 51–54. (in Russ.)
17. Maiorov E.E., Borodyansky Yu.M., Kurlov V.V., Tayurskaya I.S., Pushkina V.P., Guliev R.B. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 8(66), pp. 688–695, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-688-695. (in Russ.)
18. Maiorov E.E., Arefiev A.V., Kurlov V.V., Pushkina V.P., Borodyansky Yu.M., Tayurskaya I.S. *News of the Tula state university. Technical sciences*, 2023, no. 7, pp. 585–590, DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-585-586 (in Russ.)

19. Maiorov E.E., Kostin G.A., Chernyak T.A., Baranov N.E. *News of the Tula state university. Technical sciences*, 2023, no. 7, pp. 577–581, DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-577-578. (in Russ.)

Data on authors

Evgeny E. Maiorov	—	PhD, Associate Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Applied Mathematics; E-mail: majorov_ee@mail.ru
Victor V. Kurlov	—	PhD, Associate Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Innovations and Integrated Quality Systems; E-mail: vitek543@rambler.ru
Yuriy M. Borodyansky	—	PhD, Associate Professor; Bonch-Bruevich St. Petersburg State University of Telecommunications, Department of Information Systems Security; E-mail: borodyanskyum@gmail.com
Alexander V. Dagaev	—	PhD, Associate Professor; Ivangorod Humanitarian and Technical Institute, Branch of St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Mathematics, Informatics and Information Customs Technologies; E-mail: adagaev@list.ru
Irina S. Tayurskaya	—	PhD, Associate Professor; St. Petersburg University of Management Technologies and Economics, Department of Information Technologies and Mathematics; E-mail: tis_ivesep@mail.ru

Received 19.10.2023; approved after reviewing 16.11.2023; accepted for publication 14.01.2024.

ПРИБОРЫ, СИСТЕМЫ И ИЗДЕЛИЯ МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

MEDICAL DEVICES, SYSTEMS, AND PRODUCTS

УДК 615.471
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-276-285

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС КОНТРОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В МАНЖЕТАХ ЭНДОТРАХЕАЛЬНЫХ И ТРАХЕОСТОМИЧЕСКИХ ТРУБОК

В. В. Рыкунов[1*], Д. В. Шилин[2], Д. А. Шестов[2]

[1] *Смарткафф, Москва, Россия*
[*] *info@smartcuff.ru*

[2] *Национальный исследовательский университет „МЭИ“, Москва, Россия*

Аннотация. Представлен полнофункциональный прототип первого отечественного автоматизированного устройства, обеспечивающего поддержание безопасного давления в манжетах эндотрахеальных и трахеостомических трубок. Описаны алгоритмы работы устройства. Для формирования отличительных особенностей разрабатываемого прототипа и определения его функционального состава выполнен сравнительный анализ существующих решений и проведены патентные исследования. Разработанные пневматическая схема и плата управления позволяют реализовать режимы работы, необходимые для оказания медицинской помощи. Испытания устройства, проведенные в лабораторных условиях, демонстрируют высокую надежность и энергоэффективность прототипа, который подходит ко всем аппаратам искусственной вентиляции легких и наркозно-дыхательным аппаратам, следовательно, может применяться в отделениях анестезиологии и реанимации в лечебных учреждениях.

Ключевые слова: *эндотрахеальная трубка, трахеостомическая трубка, давление в манжете, поддержание давления*

Благодарности: работа выполнена при поддержке грантом Фонда содействия инновациям по программе „Старт“, договор № 4429ГС1/72/608, 09.02.2022.

Ссылка для цитирования: *Рыкунов В. В., Шилин Д. В., Шестов Д. А.* Интеллектуальный программно-аппаратный комплекс контроля давления в манжетах эндотрахеальных и трахеостомических трубок // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 276—285. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-276-285.

INTELLIGENT SOFTWARE AND HARDWARE SYSTEM FOR MONITORING THE PRESSURE IN THE CUFFS OF ENDOTRACHEAL AND TRACHEOSTOMY TUBES

V. V. Rykunov[1*], D. V. Shilin[2], D. A. Shestov[2]

[1] *Smartcaff LLC, Moscow, Russia*
**info@smartcuff.ru*

[2] *National Research University „Moscow Power Engineering Institute“, Moscow, Russia*

Abstract. A fully functional prototype of the first domestic automated device ensuring the maintenance of safe pressure in the cuffs of endotracheal and tracheostomy tubes is presented. The operating algorithms of the device are described. To formulate the distinctive features of the prototype being developed and determine its functional composition, a comparative analysis of existing solutions is performed and patent research is carried out. The developed pneumatic circuit and control board make it possible to implement the operating modes necessary to provide medical care. Tests of the device carried out in laboratory conditions demonstrate the high reliability and energy efficiency of the prototype; the device is suitable for all mechanical ventilation devices and anesthesia-respiratory devices, and therefore, can be used in anesthesiology and intensive care departments in medical institutions.

© *Рыкунов В. В., Шилин Д. В., Шестов Д. А., 2024*

Keywords: endotracheal tube, tracheostomy tube, cuff pressure, pressure maintaining

Acknowledgements: the work was supported by a grant from the Innovation Promotion Fund under the “Start” program, contract No. 4429GS1/72/608, 02/09/2022.

For citation: Rykunov V. V., Shilin D. V., Shestov D. A. Intelligent software and hardware system for monitoring the pressure in the cuffs of endotracheal and tracheostomy tubes. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 276—285 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-276-285.

Введение. Устройства контроля давления в манжетах эндотрахеальных и трахеостомических трубок (ЭТТ и ТСТ) являются важным компонентом медицинского оборудования для управления давлением внутри манжеты, установленной вокруг трубок (рис. 1).

ЭТТ и ТСТ герметизируют нижние дыхательные пути, обеспечивают профилактику аспирации содержимого желудка за счет раздувания манжет (нагнетания избыточного давления). Расположение ЭТТ в трахее показано на рис. 2.

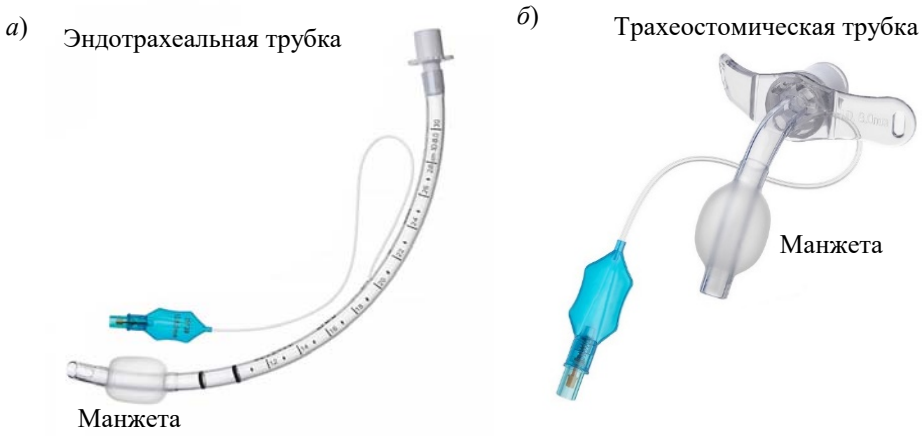


Рис. 1

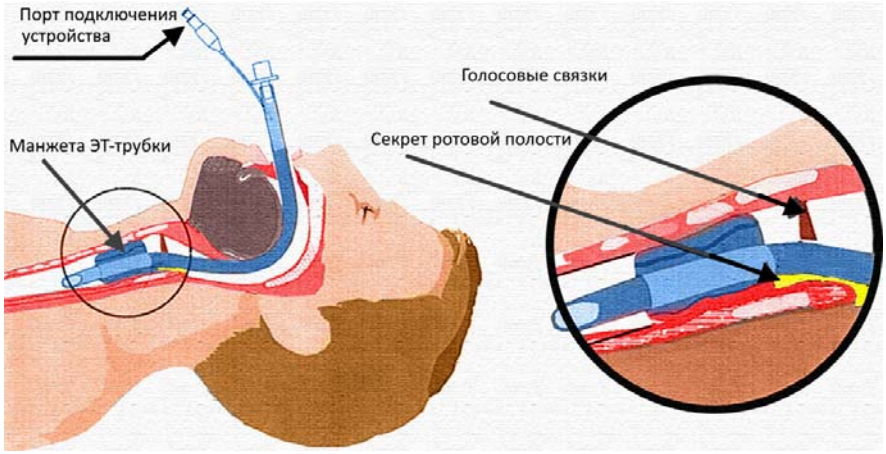


Рис. 2

Принято считать, что оптимальный диапазон давления в манжетах ЭТТ и ТСТ для взрослых пациентов составляет 20—30 см H_2O[*]. Превышение данных значений приводит к возникновению ишемии трахеи, образованию трахеопищеводных свищей и стенозов, развитию болевого синдрома, разрыву стенок трахеи. Давление ниже рекомендованного диапазона приводит к пневмонии, связанной с искусственной вентиляцией легких (вентилятор-ассоциированная пневмония — ВАП). ВАП является основной причиной смертности в отде-

[*] Давление в дыхательных путях принято измерять в сантиметрах водного столба, см H_2O, или в миллиметрах: 1 мбар≈0,9806… см H_2O≈100 Па.

лении интенсивной терапии из-за микроаспирации потенциально инфекционных выделений через микроканалы, образованные при сворачивании избыточного материала манжеты после раздувания.

Результаты исследований методов контроля давления в манжетах ЭТТ и ТСТ, проводимые во всем мире, демонстрируют схожую проблематику:

— использование „классического“ метода пальпации контрольного баллона ЭТТ и ТСТ при оценке уровня давления приводит к ошибкам в определении давления в манжете вне зависимости от стажа персонала: например, в исследовании Казахского научно-исследовательского института онкологии и радиологии (Алматы, Казахстан) давление не соответствовало рекомендуемому оптимальному диапазону в 58 % случаев [1]; в другом исследовании показано, что применение пальпаторного метода при определении давления в манжете ЭТТ приводило к 83 % ошибок [2];

— с течением времени происходит самопроизвольное снижение давления; в [3] показано недопустимое снижение давления (ниже 20 см H_2O) спустя 2 ч после проведения интубации в 45 % случаев.

Для решения подобных проблем необходим постоянный инструментальный контроль давления в манжетах ЭТТ и ТСТ (как минимум один раз каждые 8 ч) [4]. Популярные решения, существующие в современной практике, не автоматизированы, ручное управление не позволяет произвести точную настройку и требует постоянного контроля, что увеличивает нагрузку на медицинский персонал.

Следует отметить, что в настоящее время крупными мировыми производителями медицинской техники разработаны автоматизированные устройства контроля и поддержания давления в манжетах ЭТТ и ТСТ, однако подобные устройства не производятся отечественными предприятиями, а зарубежные разработки не имеют регистрационных удостоверений Росздравнадзора и не допущены к обращению на территории РФ. Импортные аналоги прошли клинические испытания и имеют доказательную базу эффективности применения в медицинской практике [5—8].

В настоящей статье представлен разработанный полнофункциональный прототип устройства, обеспечивающего поддержание безопасного значения давления в манжетах ЭТТ и ТСТ. Прототип имеет простое и понятное управление и функционал, не уступающий устройствам, производимым мировыми лидерами в данной отрасли. Проведены испытания прототипа в условиях, близким к реальным.

Материалы и методы исследования. Систематический обзор исследований, опубликованных на русском, немецком и английском языках в 1980—2020 гг. (с преимущественным включением, 69 %, данных за последние девять лет), выполнен с использованием баз данных PubMed, ScienceDirect, ProQuest и GoogleScholar, проведены также патентные исследования. Использование более ранних научных работ (старше девяти лет, 21 %) обоснованно, так как указанные источники являются оригинальными. По результатам обзора сформулированы технические требования к прототипу устройства.

Сравнительные характеристики зарубежных автоматических систем поддержания давления в манжетах ЭТТ и ТСТ и прототипа, разработанного ООО „Смарткафф“ (Москва), приведены в табл. 1.

Разработанный прототип устройства по заявленным техническим характеристикам уступает аналогу производства VBM Medizintechnik GmbH по верхнему пределу диапазона значений задаваемого давления, что, однако, не является недостатком, так как оптимальный диапазон давления в манжетах ЭТТ и ТСТ для взрослых и детей старшего возраста составляет 20—30 см H_2O. Для детей младше восьми лет имеются рекомендации по поддержанию давления, не превышающего 20 см H_2O. Следует отметить, что разработанный прототип

превосходит швейцарское устройство по времени автономной работы: Hamilton Medical AG — 8 ч непрерывной работы, прототип ООО „Смарткафф“ — более 12 ч непрерывной работы.

Таблица 1

Основные технические характеристики	Hamilton Medical AG, Швейцария	VBM Medizintechnik GmbH, Германия	Разработанный прототип, ООО „Смарткафф“, Россия
Диапазон задаваемого давления, см H_2O	5…50	0…99	5…50
Давление по умолчанию, см H_2O	25	25	25
Время автономной работы, ч	⇓8	—	⇑15
Возможность работы от элементов питания, перезаряжаемых и неперезаряжаемых	⇓ Нет	⇓ Нет	⇑ Есть
Точность измерения давления, см H_2O	⇓± 2	⇓± 2	⇑± 2
Режим „Поддержание заданного давления“ или аналогичный	Есть	Есть	Есть
Режим „Периодическое повышение давления“ или аналогичный	Есть	Нет	Есть
Режим „Периодическая декомпрессия“ или аналогичный	⇓ Нет	⇓ Нет	⇑ Есть
Режим „Сдутие манжеты“ или аналогичный	Есть	Нет	Есть
Режим „Определение оптимального давления“ или аналогичный	⇓ Нет	⇓ Нет	⇑ Есть

Описание разработанного прототипа устройства. На рис. 3, *а* представлено фото прототипа устройства с подключенной ЭТТ в режиме поддержания заданного давления. Аппаратная часть (рис. 3, *б*) состоит из печатной платы (платы управления) и пневматического блока. Печатная плата содержит микроконтроллер STM32F051C8T6, драйвер двигателя помпы DRV8834, пьезоизлучатели с генератором SMB-17CC-P10 и HCM1203X JLW (основной и резервный динамики), светодиоды световой сигнализации, контроллеры заряда аккумуляторных батарей, датчики давления и других компонентов для управления блоком пневматики и взаимодействия с оператором.

а) *б*)

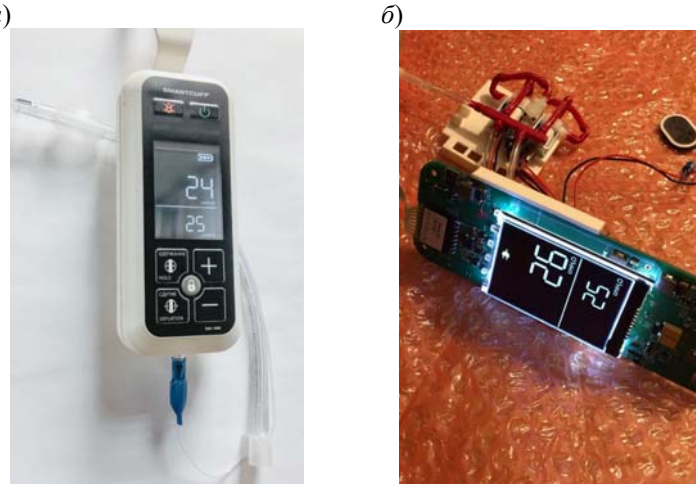


Рис. 3

Пневматическая блок предназначен для подачи давления нагнетания/разряжения в манжеты ЭТТ или ТСТ. Пневматическая схема блока пневматики представлена на рис. 4, где Pump — мембранный насос; *Y1*, *Y2* — электромагниты; $S_{P_к}$ — датчик давления для осуществления контроля; $S_{P_м}$ — датчик давления для осуществления мониторинга; *V1*, *V2* — 3/2 пневматические распределители для подачи давления/вакуума в ЭТ-трубку.

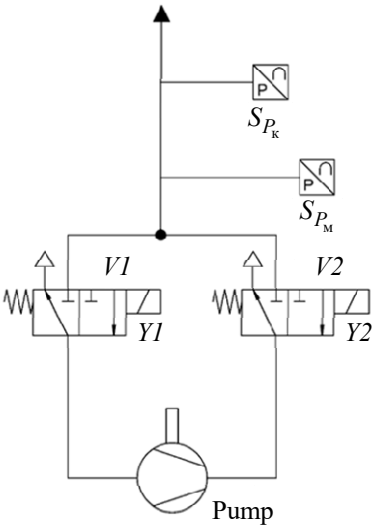


Рис. 4

Плата управления передает управляющий сигнал на мембранный насос Pump, который подает давление нагнетания/разряжения через пневматические 3/2-распределители *V1* и *V2* в манжету ЭТТ или ТСТ через разъем подключения. В линии между распределителями *V1*, *V2* и разъемом подключения манжет установлены два датчика, непрерывно измеряющие давление в манжете с контролем взаимных показателей (при выходе из строя одного из датчиков прототип сообщит пользователю о неисправности и остановит подачу давления в манжету). Для нагнетания давления в манжету плата управления подает сигнал на электромагнит *Y1* распределителя *V1*, сигнал на электромагните *Y2* распределителя *V2* отсутствует; для разряжения подается сигнал на электромагнит *Y2* распределителя *V2*, с электромагнита *Y1* распределителя *V1* сигнал снят.

Прототип имеет визуальную и звуковую сигнализацию опасных событий и режимов работы. Световой индикатор отображает два цвета (желтый и красный) и работает с частотой мигания в пределах от 0,4 до 0,8 Гц (желтый) и от 1,4 до 2,8 Гц (красный). Выполнена стандартная сигнализация.

Режимы работы. Прототип устройства имеет шесть режимов работы.

1. Самотестирование — в данном режиме прототип проводит самодиагностику основных компонентов: контроллера, системы сигнализации, помпы, распределителей, датчиков давления.

2. Поддержание заданного давления — в данном режиме прототип нагнетает давление в манжеты ЭТТ или ТСТ, значение которого задано по умолчанию (целевое значение давления по умолчанию задается в режиме „Конфигурация“). В процессе нагнетания давления пользователь имеет возможность корректировки значения целевого давления. В случае снижения или увеличения текущего значения давления $P_у$ в манжете ЭТТ или ТСТ устройство автоматически стабилизирует это значение до целевого, установленного пользователем.

3. Временная задержка давления — режим предназначен для временного повышения давления в манжетах ЭТТ и ТСТ на определенную величинуи удержания его в течение

заданного периода времени. По умолчанию задержка длится 10 мин, а к текущему значению $P_у$ прибавляется 5 см H_2O.

4. Периодическая декомпрессия — режим предназначен для временного периодического понижения давления в манжетах ЭТТ и ТСТ на определенную величину и удержания его в течение заданного периода времени. Пользователь задает настройки режима при его активации: задается значение давления понижения ($P_у$ – $P_п$), время снижения давления $t_п$, время периода срабатывания режима $t_р$ (рис. 5).

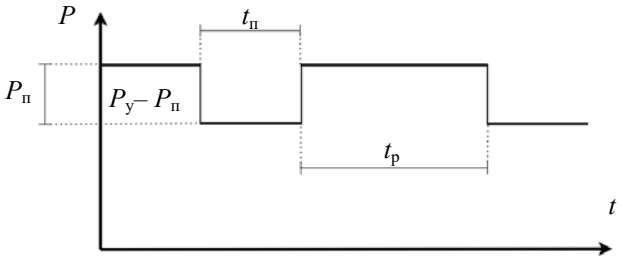


Рис. 5

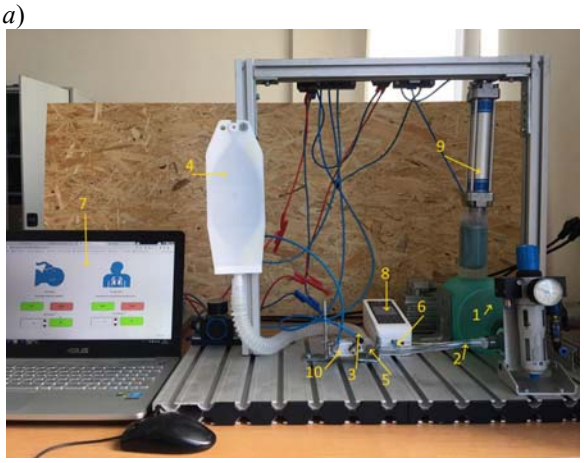
5. Сдутие манжеты — режим предназначен для сдутия манжеты (для облегчения экстубации (удаления трубки) пациента).

6. Конфигурация — режим предназначен для выбора единиц измерения, задания значения целевого давления по умолчанию, выбора типа пациента (неонатальный или взрослый).

Исследование и апробация режимов работы. В ходе апробации режимов работы проведено исследование скорости нагнетания давления в манжету ЭТТ или ТСТ.

Мембранный насос в выходной линии (нагнетания давления) генерирует расход сжатого воздуха, объем которого зависит от скважности работы насоса. Под скважностью понимается время подачи напряжения питания на мембранный насос, по истечении которого исследуется разность давлений $|P_у–P_к| \le 2$ см H_2O. Для проведения исследований был разработан лабораторный стенд, внешний вид и структурная схема которого представлены на рис. 6, *а*, *б*; здесь приняты следующие обозначения: *1* — мешок Амбу; *2* — эндотрахеальная трубка; *3* — имитация трахеи; *4* — тестовое легкое; *5* — манжета; *6* — луер; *7* — персональный компьютер; *8* — Смарткафф; *9* — пневматический цилиндр; *10* — пневматический захват.

а)



б)

Рис. 6

В рамках исследования система управления питанием мембранного насоса была настроена так, что при рассогласовании заданного $P_у$ и текущего $P_к$ давлений в манжете ЭТТ мембранный насос включался при большой скважности, равной 200 мс. Для имитации эксплуатационной ситуации использовался мешок Амбу *1*, имитирующий работу аппарата

искусственной вентиляции легких (ИВЛ), ЭТ-трубка *2* присоединялась к опытному образцу через разъем *6*.

На рис. 7, *а* представлены переходные характеристики зависимости поддержания давления в манжетах разного диаметра при скважности, равной 200 мс и различных значениях $P_у$; кривая черного цвета соответствует диаметру манжеты D=7 мм, кривая синего цвета — D=8 мм, красного — 9 мм.

Анализ графиков показывает, что вне зависимости от диаметра манжеты система переходит в колебательный режим. При понижении скважности работы мембранного насоса до 50 мс переходные процессы примут вид, представленный на рис. 7, *б*, откуда видно, что уменьшение скважности снижает время регулирования и уменьшается перерегулирование при поддержании заданного давления в манжете ЭТТ.

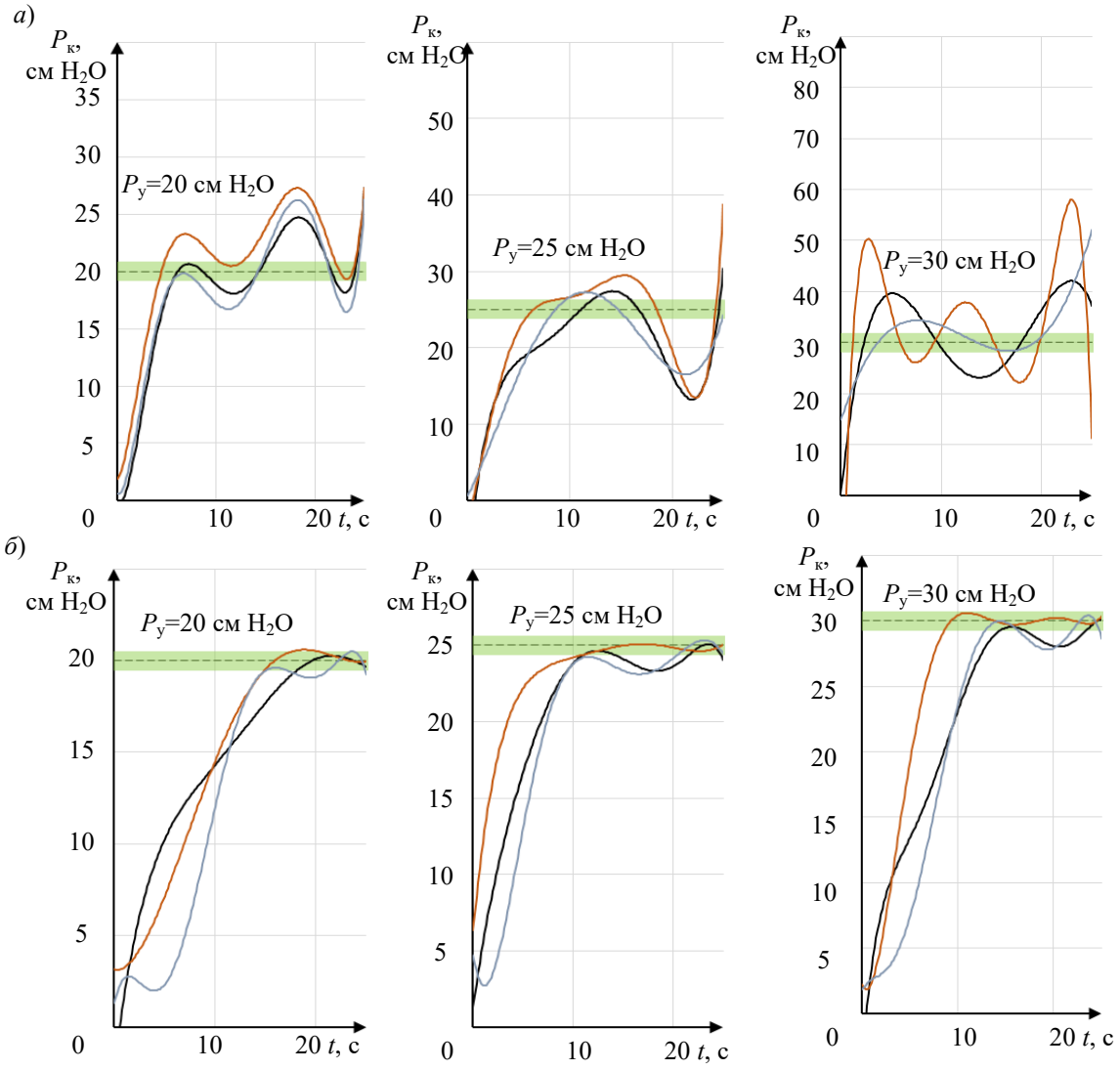


Рис. 7

В ходе апробации режимов работы проведено также исследование режима „Поддержание заданного давления“. При исследовании этого режима работа лабораторного стенда отличается от предыдущего тем, что учитывается воздействие на мешок Амбу пневматического цилиндра (поз. *9* на рис. 6, *а*), имитирующего работу аппарата ИВЛ. Были проведены эксперименты по поддержанию заданного давления $P_у$=25 см H_2O в манжетах разного диаметра. Инспираторное давление $P_{инсп}$ принималось равным 10 и 30 см H_2O в зависимости от эксперимента. Результаты эксперимента представлены на рис. 8, где черной траекторией отмечена переходная характери-

стика изменения давления в манжете ЭТТ при $P_{инсп}$ =10 см H_2O, а красной траекторией — при $P_{инсп}$ =30 см H_2O; пунктирная линия соответствует $P_у$=25 см H_2O, светло-зеленое поле — диапазону допустимой ошибки поддержания давления в манжете ЭТТ.

Согласно результатам эксперимента, при увеличении инспираторного давления также увеличивается внешнее воздействие на стенки манжеты ЭТТ вне зависимости от ее размеров, что приводит к увеличению числа срабатываний пневматического блока. Также следует отметить, что при увеличении диаметра манжеты количество срабатываний снижается.

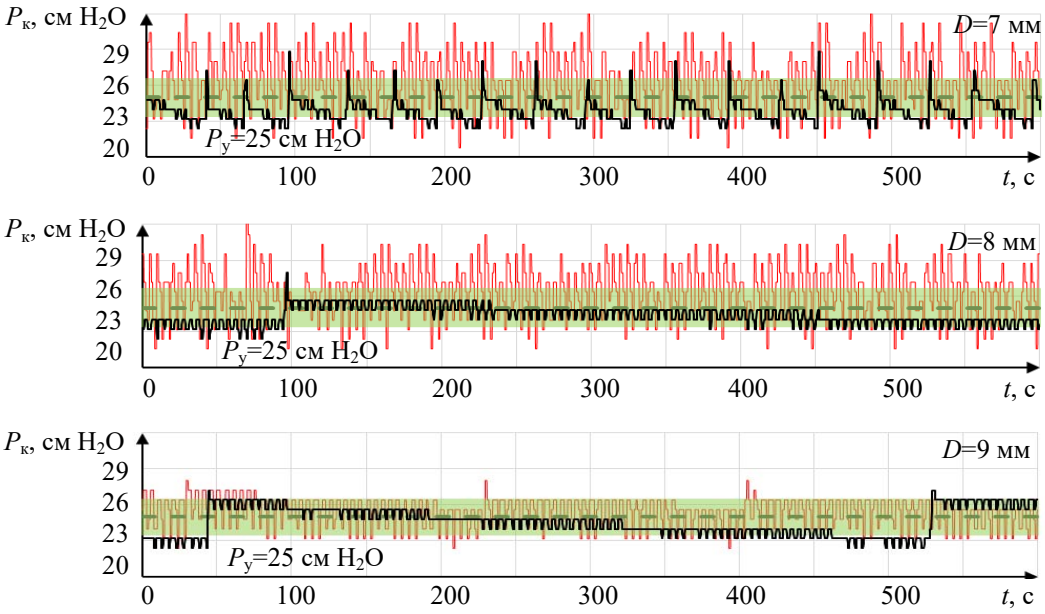


Рис. 8

В табл. 2 представлены численные параметры проведенных экспериментов. Режим „Поддержание заданного давления“ позволяет поддерживать давление $P_у$ в заданном диапазоне абсолютной ошибки Δ, равной $|P_у–P_к| \le 2$ см H_2O.

Таблица 2

Номер и параметры эксперимента	$P_{инсп}$=10 см H_2O	$P_{инсп}$ =30 см H_2O	Абсолютная ошибка Δ при	
			$P_{инсп}$ =10 см H_2O	$P_{инсп}$ =30 см H_2O
Эксперимент № 1, $P_у$=25 см H_2O, D=7 мм $P_к$, см H_2O	24,0	26,4	1,0	1,4
Эксперимент № 2, $P_у$=25 см H_2O, D=8 мм $P_к$, см H_2O	24,0	26,4	1,0	1,4
Эксперимент № 3, $P_у$=25 см H_2O, D=9 мм $P_к$, см H_2O	24,8	25,6	0,2	0,6

Для исследования времени автономной работы устройства, продолжительности работы и точности измерений показаний при различных уровнях заряда элементов питания в составе лабораторной установки были активированы дополнительные компоненты (рис. 9): ПЦ1, ПЦ2 — пневматические цилиндры; ПЛК — программируемый логический контроллер; ПР1, ПР2 — пневматические распределители. Пневматический захват (ПЦ2, см. поз. 10 на рис. 6, *а*) имитирует периодическое изменение геометрии трахеи из-за неравномерного расположения тела пациента или сокращения мускулатуры.

С использованием полной структурной схемы лабораторной установки получены результаты исследования, согласно которым заряд элементов питания прототипа устройства никак не влияет на его работу (табл. 3). Время автономной работы составило более 12 ч, что в несколько раз превышает время автономной работы аналогов (в частности, Hamilton Medical AG).

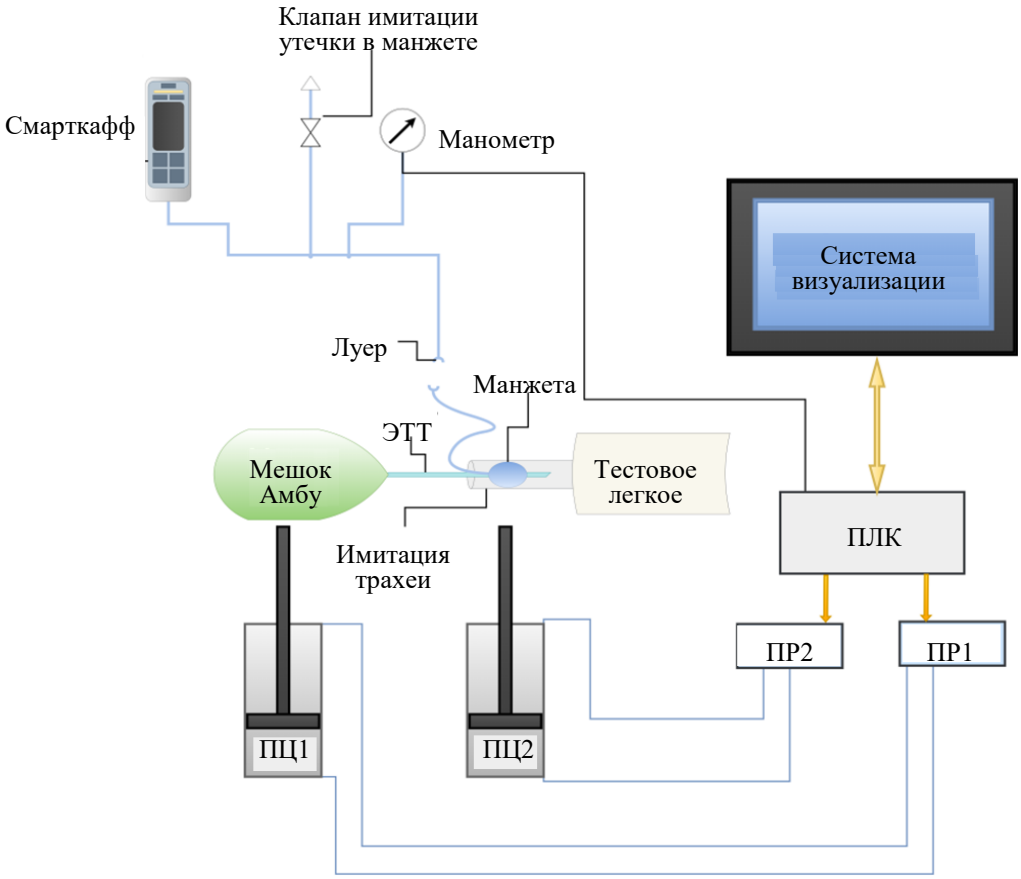


Рис. 9

Таблица 3

Заряд элементов питания, %	$P_у$, см H_2O	$P_к$, см H_2O
100	25,0	25,6
80	25,0	25,3
60	25,0	25,9
40	25,0	24,5
20	25,0	25,1

Заключение. Проанализированы и получены основные исходные данные для проектирования прототипа устройства, обеспечивающего поддержание безопасного давления в манжетах эндотрахеальных и трахеостомических трубок. Данные о точности измерений, условиях работы, сигнализации и индикации опасных событий позволили сформировать следующие требования для определения основных конструктивных параметров прототипа устройства: массогабаритные характеристики, требования к источнику питания, требования к системе индикации опасных событий (функция „тревог“), требования к режимам работы. На основании полученных данных была разработана конструкторская документация для проектирования 3D-модели, изготовления опытного образца и разработки режимов работы прототипа продукта.

Лабораторные испытания подтвердили высокую надежность и энергоэффективность прототипа, который подходит ко всем аппаратам искусственной вентиляции легких и наркозно-дыхательным аппаратам, следовательно, может применяться в отделениях анестезиологии и реанимации в лечебных учреждениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдухалилов Н. Р., Арынов А. А., Байдаулет Д. А., Нурманова А. А., Сейдалиева Э. А., Чурсин В. В.* Контроль давления в манжете эндотрахеальной трубки во время анестезии у онкологических пациентов // Онкология и радиология Казахстана. 2022. Вып. 66, № 4. С. 38—41. DOI: 10.52532/2521-6414-2022-4-66-38-41.

2. *Duarte N. M. D. C., Caetano A. M. M., Arouca G. O., Ferrreira A. T., Figueiredo J. L.* Insuflação de balonete de tubotraqueal por métodosubjetivo: desempenho de médicosresidentes e especialistasemanestesiologia. Estudoprospectivoobservacional [Subjective method for tracheal tube cuff inflation: performance of anesthesiology residents and staff anesthesiologists. Prospective observational study (in Spanish)] // Braz. Jurnal Anesthesiol. 2020. Vol. 70(1). P. 9—14. DOI: 10.1016/j. bjan.2019.09.010.

3. *Motoyama A., Asai S., Konami H.* et al. Changes in endotracheal tube cuff pressure in mechanically ventilated adult patients // J. Intensive Care. 2014. N 2(7). DOI: 10.1186/2052-0492-2-7.

4. *Nseir S., Brisson H., Marquette Ch.-H., Chaud P., Di Pompeo Ch., Diarra M., Durocher A.* Variations in endotracheal cuff pressure in intubated critically ill patients: prevalence and risk factors // Eur. J. Anaesthesiol. 2009. N 26(3). DOI: 10.1097/eja.0b013e3283222b6e.

5. *Seegobin R. D., Van Hasselt G. L.* Endotracheal cuff pressure and tracheal mucosal blood flow: endoscopic study of effects of four large volume cuffs // British Medical Journal. 1984. Vol. 288. P. 965—968.

6. *Lorente L., Lecuona M., Jiménez A., Lorenzo L., Roca I., Cabrera J., Llanos C., Mora M. L.* Continuous endotracheal tube cuff pressure control system protects against ventilatorassociatedpneumonia // Critical Care. 2014. N 18(2). R77.

7. *Nseir S.* et al. Continuous control of tracheal cuff pressure and microaspiration of gastric contents in critically ill patients // American Journal of Respiratory and Critical Care Medicine 2011. N 184.9. P. 1041—1047.

8. *Lizy C., Swinnen W., Labeau S., Poelaert J., Vogelaers D., Vandewoude K., Dulhunty J., Blot S.*. Cuff pressure of endotracheal tubes after changes in body position in critically ill patients treated with mechanical ventilation // American Journal of Critical Care. 2014. N 23(1). P. 1—8.

Сведения об авторах

Виктор Владимирович Рыкунов — ООО „Смарткафф“; генеральный директор; E-mail: info@smartcuff.ru

Денис Викторович Шилин — канд. техн. наук; Национальный исследовательский университет „МЭИ“, кафедра управления и интеллектуальных технологий; доцент; E-mail: deninfo@mail.ru

Дмитрий Александрович Шестов — канд. техн. наук; Национальный исследовательский университет „МЭИ“, кафедра управления и интеллектуальных технологий; ст. преподаватель; E-mail: shestovda@mpei.ru

Поступила в редакцию 03.07.2023; одобрена после рецензирования 21.11.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. Abdukhalilov N.R., Arynov A.A., Baidaulet D.A., Nurmanova A.A., Seidalieva E.A., Chursin V.V. *The Oncology and Radiology of Kazakhstan*, 2022, no. 4(66), pp. 38–41, DOI: https://www.doi.org/10.52532/2521-6414-2022-4-66-38-41.
2. Duarte N.M.D.C, Caetano A.M.M., Arouca G.O., Ferrreira A.T., Figueiredo J.L. *Braz. J. Anesthesiol*, 2020, no. 1(70), pp. 9–14, https://doi.org/10.1016/j.bjan.2019.09.010.
3. Motoyama A., Asai S., Konami H. et al. *J. Intensive Care*, 2014, no. 7(2), https://doi.org/10.1186/2052-0492-2-7.
4. Nseir S., Brisson H., Marquette Ch.-H., Chaud P., Di Pompeo Ch., Diarra M., Durocher A. *Eur. J. Anaesthesiol.*, 2009, no. 3(26), pp. 229–234, DOI: 10.1097/eja.0b013e3283222b6e.
5. Seegobin R.D., and Van Hasselt G.L. *British Medical Journal*, 1984, vol. 288, pp. 965–968.
6. Lorente L., Lecuona M., Jiménez A., Lorenzo L., Roca I., Cabrera J., Llanos C., Mora M.L. *Critical Care*, 2014, no. 2(18), pp. R77.
7. Nseir S. et al. *American Journal of Respiratory and Critical Care Medicine*, 2011, no. 9(184), pp. 1041–1047.
8. Lizy C., Swinnen W., Labeau S., Poelaert J., Vogelaers D., Vandewoude K., Dulhunty J., Blot S. *American Journal of Critical Care*, 2014, no. 1(23), pp. 1–8.

Data on authors

Viktor V. Rykunov — Smartcaff LLC; CEO; E-mail: info@smartcuff.ru

Denis V. Shilin — PhD; National Research University „MPEI“, Department of Management and Intelligent Technologies; Associate Professor; E-mail: deninfo@mail.ru

Dmitry A. Shestov — PhD; National Research University „MPEI“, Department of Management and Intelligent Technologies; Senior Lecturer; E-mail: shestovda@mpei.ru

Received 03.07.2023; approved after reviewing 21.11.2023; accepted for publication 14.01.2024.

МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ АНАЛИЗА И КОНТРОЛЯ МАТЕРИАЛОВ, ИЗДЕЛИЙ, ВЕЩЕСТВ И ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ

METHODS AND INSTRUMENTS FOR ANALYSIS AND MONITORING OF THE NATURAL ENVIRONMENT, SUBSTANCES, MATERIALS AND PRODUCTS

УДК 544.774
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-286-293

ПРОНИЦАЕМОСТЬ НАНОПОРИСТЫХ СТЕКОЛ

Д. П. Волков[1*], Ю. П. Заричняк[2], И. К. Мешковский[2], М. А. Симонова[3]

[1] *Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России им. Е. Н. Зиничева, Санкт-Петербург, Россия*
[*] *dp-lv@yandex.ru*

[2] *Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия*

[3] *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. Исследуется проницаемость нанопористых стекол с радиусом пор 5—200 нм. Такие пористые стекла используются в качестве тонких фильтров, оптических материалов с регулируемым коэффициентом преломления, твердых адсорбентов, селективных мембран, основы для композиционных материалов в лазерной технике и оптическом приборостроении. Предложены модели структуры таких материалов и методика расчета их молекулярной проницаемости. Результаты расчета по предложенным моделям согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: *пористое стекло, модель структуры, молекулярная проницаемость, параллельные капилляры, взаимопроникающие компоненты*

Ссылка для цитирования: *Волков Д. П., Заричняк Ю. П., Мешковский И. К., Симонова М. А.* Проницаемость нанопористых стекол // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 286—293. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-286-293.

PERMEABILITY OF NANOPOROUS GLASSES

D. P. Volkov[1*], Yu. P. Zarichnyak[2], I. K. Meshkovsky[2], M. A. Simonova[3]

[1] *E. N. Zinichev St. Petersburg University of State Fire Service of EMERCOM of Russia, St. Petersburg, Russia*
[*] *dp-lv@yandex.ru*

[2] *ITMO University, St. Petersburg, Russia*

[3] *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*

Abstract. The permeability of nanoporous glasses with the pore radius of 5–200 nm is studied. Such porous glasses are used as thin filters, optical materials with adjustable refractive index, solid adsorbents, selective membranes, and as the basis for composite materials in laser technology and optical instrument making. Models of the structure and methods for calculating the molecular permeability of such materials are proposed. Results of calculation using the proposed models are compared with experimental data.

Keywords: porous glass, structure model, molecular permeability, parallel capillaries, interpenetrating components

For citation: Volkov D. P., Zarichnyak Yu. P., Meshkovsky I. K., Simonova M. A. Permeability of nanoporous glasses. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 286—293 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-286-293.

© Волков Д. П., Заричняк Ю. П., Мешковский И. К., Симонова М. А., 2024

Пористые стекла по размерам пор могут быть разделены на нанопористые и ультрапористые. К нанопористым стеклам относят пластины с радиусом пор r= 1…10 нм, полученные из исходного монолитного стекла путем выщелачивания растворами кислот. Для получения ультрапористых стекол нанопористые пластины подвергают дополнительной обработке растворами щелочей, что приводит к увеличению радиуса пор до 200 нм [1—3]. В соответствии с классификацией IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry — Международный союз теоретической и прикладной химии) по размеру пор нанопористые вещества разделяются на три группы: микропористые (r < 2 нм); мезопористые (r = 2…50 нм); макропористые (r > 50 нм) [4]. Исследуемые в данной работе стекла относятся к группе нанопористых или мезопористых материалов.

Одна из важных характеристик пористого вещества — проницаемость по отношению к газам и жидкостям. Известны попытки создания теории, связывающей геометрическую структуру пористого материала с проницаемостью. Весьма полный обзор предложенных теорий приведен в работах [5, 6], где проницаемость представлена как макроскопическая характеристика пористого материала, определяемая законами Пуазейля и Дарси. В нанопористых стеклах наблюдается молекулярный режим течения газа, подчиняющийся закону Кнудсена. В этой связи цель настоящей статьи — выбор моделей, описывающих структуру нанопористых стекол, и вывод формул для расчета их проницаемости при кнудсеновском режиме течения газа.

Кислотным травлением отдельных компонентов в стеклах сложного состава можно получить структуру с сообщающимися порами. Структура и свойства пластинок из пористого стекла в значительной степени зависят от условий их окончательной термообработки [3, 7—9]. В работах [7, 8] было показано, что при повышении температуры термообработки тел из пористого стекла от 130 до 800 °С (при постоянной длительности 40 мин) в них наблюдаются две стадии изменений. Первая, в диапазоне температур 130—550 °С, характеризуется незначительным уменьшением суммарной пористости и некоторым увеличением среднего радиуса пор. На второй стадии (680—800 °С) суммарная пористость резко уменьшается, а к концу этой стадии основной объем пор почти полностью исчезает. Зависимость пористости (П) и среднего радиуса пор (r) от температуры термообработки (t) показана на рис. 1.

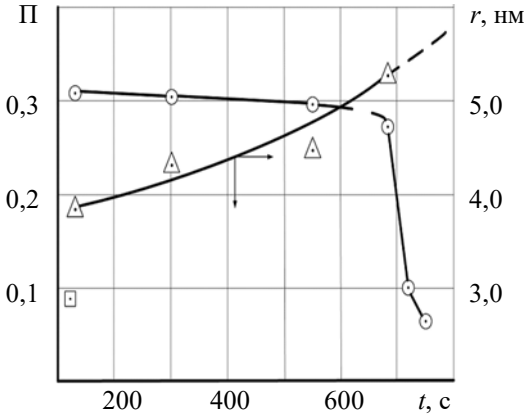


Рис. 1

Технология получения пористых стекол позволяет описать их структуру моделями двух типов: 1 — моделью параллельных капилляров [5, 10] и 2 — трехмерной изотропной моделью с взаимопроникающими компонентами [10, 11]. Как было отмечено, в результате термообработки пористость стеклянных пластинок остается практически постоянной, а диаметр (d) пор увеличивается. Это можно объяснить следующим образом.

В процессе получения пористой структуры на стенках пор (капилляров) образуются микрошероховатости (рис. 2, *а*). В результате термообработки микрошероховатости начинают оплавляться (рис. 2, *б*) и постепенно сглаживаются (рис. 2, *в*). В соответствии с этим представим микрошероховатости на стенках капилляра в упрощенном виде, а именно в виде зубцов

одинаковой формы и размера (рис. 2, *г*). Далее представим капилляр в виде, показанном на рис. 2, *д*: здесь выступы микрошероховатостей „собраны“ с одной стороны капилляра, а впадины — с другой, причем длины выступов и впадин равны между собой и составляют половину длины капилляра.

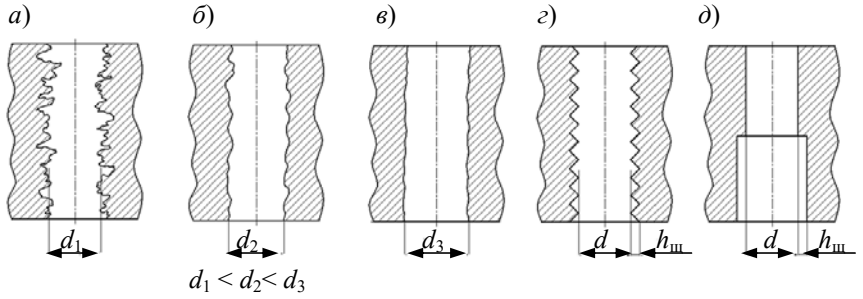


Рис. 2

Анализ процесса фильтрации газа через пластинки из пористого стекла проведен на элементарных ячейках (рис. 3). На рис. 3, *а*, *в* представлены элементарные ячейки исходной пористой структуры (после кислотного травления) для 1-й и 2-й моделей: здесь l_1 и l_2 — радиусы поры (капилляра), соответствующие выступам и впадинам микрошероховатостей, L — длина капилляра, $k_{м1}$ и $k_{м2}$ — проницаемость компонентов. С повышением температуры термообработки выступы микрошероховатостей оплавляются, при этом l_1 увеличивается, а l_2 уменьшается. При температуре 680 °С микрошероховатости сгладились, т.е. $l_1=l_2$. Элементарные ячейки приобретают вид, изображенный на рис. 3, *б*, *г* (модели 1 и 2 соответственно).

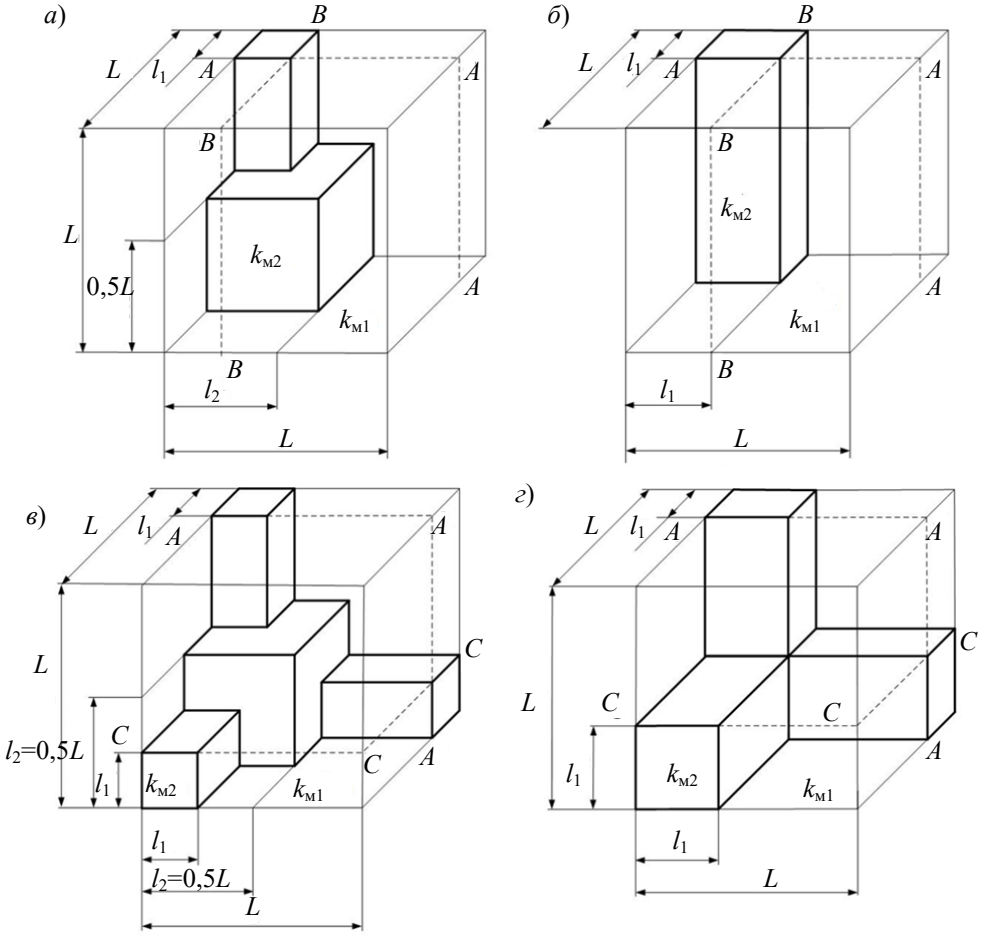


Рис. 3

В работе [8] приведены экспериментальные данные по размерам удельной поверхности пор пластинок из пористого стекла. На основе этих данных была определена средняя высота

микрошероховатостей, составляющая $h_ш$=1,5 нм. В начальный момент времени пористость пластинок П=0,3, а средний радиус пор r=3,9 нм. Примем, что этот радиус соответствует выступам микрошероховатостей l_1. Тогда радиус пор, соответствующий впадинам микрошероховатостей, будет равен $r=l_2\approx1{,}4l_1\approx5{,}5$ нм. В соответствии с принятыми допущениями найдем значения относительных радиусов $\overline{l_1}=l_1/L$ и $\overline{l_2}=l_2/L$ для рассматриваемых моделей.

а) *Модель параллельных капилляров*. Запишем выражение для пористости элементарной ячейки до термообработки (см. рис. 3, *а*):

$$П = 0{,}5\,\overline{l_1^2} + 0{,}5\,\overline{l_2^2} = 0{,}5\,\overline{l_1^2} + 0{,}5(1{,}4\,\overline{l_1})^2. \quad (1)$$

Отсюда найдем, что при П = 0,3 $\overline{l_1}=l_1/L$ = 0,45. После термообработки (t=680 °С) $\overline{l_1}=\overline{l_2}$, тогда согласно формуле (1) получим, что при П = 0,28 $\overline{l_1}$ = 0,53. Далее примем, что изменение $\overline{l_1}$ в результате термообработки происходит по линейному закону.

б) *Модель с взаимопроникающими компонентами.* Примем, что в начальный момент времени l_2 = 0,5L и П = 0,3. Тогда из выражения для пористости

$$П = \overline{l_2^3} + 3\,\overline{l_1^2}\,(1 - \overline{l_2}) \quad (2)$$

найдем, что $\overline{l_1}$ = 0,34. При t=680 °С П = 0,28 и согласно уравнению (2) $\overline{l_1}=\overline{l_2}$ =0,35.

Значения $\overline{l_1}$ и $\overline{l_2}$ при различной температуре отжига приведены в таблице.

Температура термообработки, t °С	Пористость П	Радиус пор r, нм	Модель			
			параллельных капилляров		с взаимопроникающими компонентами	
			$\overline{l_1}$	$\overline{l_2}$	$\overline{l_1}$	$\overline{l_2}$
130	0,30	3,9	0,45	0,63	0,34	0,50
300	0,29	4,3	0,47	0,61	0,34	0,48
550	0,28	5,1	0,51	0,56	0,35	0,43
680	0,28	5,6	0,53	0,53	0,35	0,35

В работах [12, 13] отмечается, что если длина свободного пробега молекул газа больше диаметра капилляра, то закономерности переноса обусловлены молекулярным режимом. Молекулярный режим течения газа будет наблюдаться и в пористых стеклах. В этом случае ламинарное течение Пуазейля и закон фильтрации Дарси выполняться не будут. Если длина свободного пробега молекул газа значительно больше диаметра пор, то процессы столкновения молекул со стенками пор доминируют над соударением молекул между собой. В этом случае транспорт газа через мембрану происходит по механизму диффузии Кнудсена [14]. При наличии перепада давления молекулы газа в таких капиллярах движутся не отдельными слоями, а независимо друг от друга, постоянно сталкиваясь со стенками капилляра. При этом принимается, что молекулы газа будут проходить через капилляр, образуя молекулярный пучок, в котором каждая молекула движется с той скоростью, какую она имела при входе в капилляр. Такое движение молекул газа называется кнудсеновским течением. Кнудсеновское течение в прямом цилиндрическом капилляре радиусом r и длиной L, на концах которого поддерживается постоянное давление p_1 и p_2, описывается уравнением [15]

$$\frac{pV}{\tau} = \frac{4\pi r^3}{3}\sqrt{\frac{2RT}{\pi M}}\cdot\frac{\Delta p}{L}, \quad (3)$$

где V — объем газа, прошедшего через капилляр за время τ; Δp — перепад давления на длине капилляра L; R — газовая постоянная; M — молекулярный вес; p — среднее давление газа; T — термодинамическая температура.

Как отмечено выше, при молекулярном режиме течения газа закон Дарси в форме

$$\frac{V}{\tau}=\frac{k}{\mu}S\frac{\Delta p}{L}, \tag{4}$$

где S — площадь поры (капилляра), μ — вязкость, k — проницаемость пористого материала по Дарси, не выполняется, так как происходит отклонение вязкости пристенных слоев от объемной.

В [16] предложено выражение для учета вязкости газа при разрежении:

$$\mu=\frac{\mu_0}{1+\left(\frac{2-f_1}{f_1}+\frac{2-f_2}{f_2}\right)\cdot \mathrm{Kn}}, \tag{5}$$

где μ_0 — вязкость газа при атмосферном давлении p_0; $\mathrm{Kn}=\Lambda/d$ — критерий Кнудсена; $\Lambda=\Lambda_0\ p_0/p$ — длина свободного пробега молекул при давлении p; коэффициенты f_1 и f_2 соответствуют, как правило, значениям $f=f_1=f_2=0{,}6\ldots1{,}0$.

Отнесем в уравнении (4) объемный расход газа к среднему давлению $(p_1+p_2)/2$ и учтем изменение вязкости, тогда получим модифицированный закон Дарси для молекулярного режима течения газа:

$$\frac{pV}{\tau}=\frac{k}{\mu}\frac{p_1+p_2}{2}S\frac{\Delta p}{L}. \tag{6}$$

В работе [17] величина $k_{\text{м}}=\dfrac{k}{\mu}\dfrac{p_1+p_2}{2}$ названа молекулярной проницаемостью и отмечено, что каждый вид потока газа можно характеризовать различными постоянными проницаемости; из (6) видно, что размерность проницаемости $k_{\text{м}}$ в системе СИ — метр в квадрате на секунду ($\text{м}^2/\text{с}$). Коэффициент проницаемости, определяемый уравнением (6), зависит от диаметра и типа пор и от природы газа.

Рассмотрим процесс фильтрации газа через элементарные ячейки. В [18] были введены понятия: „проницаемость каркаса“ $k_{\text{м1}}$ и „проницаемость поры“ $k_{\text{м2}}$. Используем эти понятия и в данной работе. Разобьем элементарную ячейку модели параллельных капилляров (см. рис. 3, *а*) плоскостями *A*—*A* и *B*—*B*, непроницаемыми для линий тока, на отдельные участки. Записав выражения для фильтрационных сопротивлений этих участков, получим уравнение для эффективной проницаемости элементарной ячейки анизотропной модели:

$$k_{\text{м}}=k_{\text{м2}}\left[\overline{l_1^2}+\left(1-\overline{l_2^2}\right)\nu+\frac{2\left(\overline{l_2^2}-\overline{l_1^2}\right)\nu}{1-\nu}\right],\quad \nu=\frac{k_{\text{м1}}}{k_{\text{м2}}}. \tag{7}$$

При $\overline{l_1}=\overline{l_2}$ (см. рис. 3, *б*) формула (7) примет вид уравнения слоистой структуры, когда слои параллельны потоку [4]:

$$k_{\text{м}}=k_{\text{м2}}\overline{l_1^2}+k_{\text{м1}}\left(1-\overline{l_1^2}\right). \tag{8}$$

В рассматриваемом случае „каркас“ беспористый, т.е. $k_{\text{м1}}=0$ и $\nu=k_{\text{м1}}/k_{\text{м2}}=0$. Тогда выражение (7) преобразуется к виду

$$k_{\text{м}}=k_{\text{м2}}\overline{l_1^2}. \tag{9}$$

Для модели взаимопроникающих компонентов применим комбинированное дробление элементарной ячейки плоскостями *A*—*A* и *C*—*C* (см. рис. 3, *в*, *г*). В этом случае формула для эффективной проницаемости при условии $k_{\text{м1}}=0$ имеет следующий вид:

$$k_{\text{м}}=k_{\text{м2}}\frac{\overline{l_1^2}}{1-\overline{l_1}+\overline{l_1^2}}. \tag{10}$$

Неизвестной величиной в формулах (9), (10) остается „проницаемость поры“ $k_{м2}$. В элементарной ячейке модели параллельных капилляров (рис. 3, *а*, *б*) в направлении фильтрации газа площадь поперечного сечения $s = l_1^2$. Тогда расход газа через капилляр (пору) при молекулярном режиме течения задается законом Кнудсена:

$$\frac{pV}{\tau} = \frac{4}{3} r s \sqrt{\frac{2RT}{\pi M}} \cdot \frac{\Delta p}{L}. \tag{11}$$

Расход газа через элементарную ячейку может быть определен из модифицированного закона Дарси (6). В этом случае L и $s=L^2$ — ширина и площадь поперечного сечения элементарной ячейки. Приравняв (6) и (11), получим выражение для проницаемости элементарной ячейки в модели параллельных капилляров:

$$k_{м} = \frac{4}{3} r \sqrt{\frac{2RT}{\pi M}} \cdot \frac{l_1^2}{L^2} = \frac{4}{3} r \sqrt{\frac{2RT}{\pi M}} \cdot \overline{l_1^2}. \tag{12}$$

Сравнение уравнений (9) и (12) показывает, что „проницаемость поры“

$$k_{м2} = \frac{4}{3} r \sqrt{\frac{2RT}{\pi M}} \ . \tag{13}$$

Проницаемость элементарной ячейки структуры с взаимопроникающими компонентами (10) определяется как

$$k_{м} = \frac{4}{3} r \sqrt{\frac{2RT}{\pi M}} \cdot \frac{\overline{l_1^2}}{1 - \overline{l_1} + \overline{l_1^2}}. \tag{14}$$

Таким образом, получены выражения для расчета коэффициента проницаемости пористых материалов при молекулярном режиме течения газа для разных моделей, когда поры и „каркас“ образуют анизотропную структуру с однонаправленными продольными капиллярами (12) либо трехмерно изотропную структуру с взаимопроникающими компонентами (14). По формулам (12) и (14) рассчитаны коэффициенты проницаемости мелкопористых стекол для водорода, гелия, неона и аргона. Результаты расчетов представлены на рис. 4, *а*, *б*; на рис. 4, *а* кривыми *1*, *2* для гелия и *3*, *4* для аргона обозначен расчет по формулам (12) и (14) соответственно, знаками *5* и *6* соответственно для гелия и аргона отмечены экспериментальные данные [4]; на рис. 4, *б*: *1*, *2* для водорода и *3*, *4* для неона — расчет по формулам (12) и (14) соответственно, знаки *5*, *6* (водород и неон) — эксперимент [4].

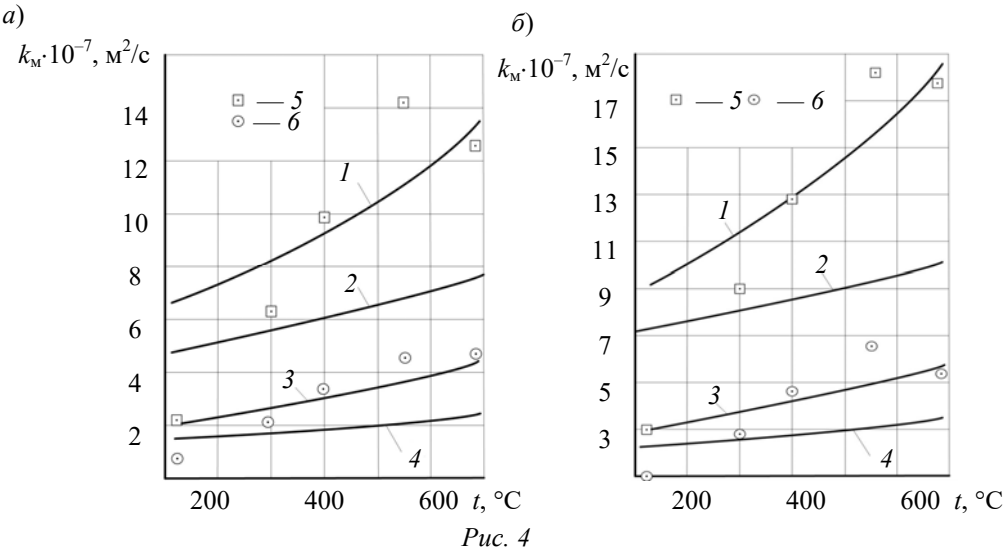


Рис. 4

Как видно из графиков, результаты расчетов качественно совпадают с экспериментальными данным, однако при температуре термообработки до t=300 °C наблюдается значительное

(до 200 %) превышение расчетных значений над экспериментальными. Основной причиной такого различия и резкого увеличения экспериментальных значений газопроницаемости стеклянных пластинок может быть изменение степени сквознопористости при повышении температуры термической обработки, тогда как в моделях доля сквозных и закрытых пор не учитывается и принимается, что все поры сквозные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мешковский И. К.* Композиционные оптические материалы на основе пористых матриц: Монография. СПб: СПбГУ ИТМО, 1998. 332 с.
2. *Ермакова Л. Е., Волкова А. В., Антропова Т. В., Сидорова М.* Получение ультра- и нанопористых стекол и исследование их структурных и электрокинетических характеристик в растворах 1:1-зарядных электролитов // Коллоидный журнал. 2007. Т. 69, № 5. С. 603—611.
3. *Шахгильдян Г. Ю.* Структурные особенности нанопористых стекол после высокотемпературного спекания // Науч. журн. „GLOBUS“: Технические науки. 2021. № 5 (41). С. 36—40.
4. *Собина Е. П.* Метрология пористости и проницаемости твердых веществ и материалов: Монография. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2021. 428 с.
5. *Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые материалы. М.: Гостехтеориздат, 1960. 247 с.
6. *Лейбензон Л. С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 244 с.
7. *Мешковский И. К., Белоцерковский Г. М., Плаченов Т. Г., Молчанова О. С.* Исследование изменений, происходящих в структуре пористого стекла // Журн. прикладной химии. 1968. Т. 41, № 7. С. 1452—1457.
8. *Мешковский И. К., Белоцерковский Г. М., Плаченов Т. Г.* Исследование изменений пористой структуры и газопроницаемости тел из пористого стекла в зависимости от условий термообработки // Журн. прикладной химии. 1970. Т. 43, № 1. С.87—92.
9. *Гавронская Ю. Ю., Пак В. Н.* Наноструктурированные материалы на основе пористого стекла // Фундаментальные исследования. 2015. № 2 (ч. 2). С. 261—266.
10. *Герасимов Д. С.* Основные определения и понятия фильтрации жидкостей и газов. Среды и границы применяемости закона Дарси: Учеб. пособие. Тюмень: Тюмен. Гос. нефтегазовый ун-т, 2013. 41 с.
11. *Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П.* Теплопроводность смесей и композиционных материалов: Монография. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
12. *Кришер О.* Научные основы техники сушки. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 539 с.
13. *Лыков А. В.* Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: Гостехтеориздат, 1954. 296 с.
14. *Пятков Е. С.* Мезопористые керамические мембраны для фракционирования низкомолекулярных углеводородов: Автореф. дис. … канд. техн. наук. М., 2017.
15. *Тимофеев Д. П.* Кинетика адсорбции. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 252 с.
16. *Прасолов Р. С.* Исследование теплообмена при переходном вакууме: Автореф. дис. … д-ра техн. наук. Л., 1967.
17. *Бэррер Р.* Диффузия в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 504 с.
18. *Волков Д. П.* Проницаемость пористых материалов // Инженерно-физический журн. 1981. Т. 41, № 3. С. 421—427.

Сведения об авторах

Дмитрий Павлович Волков — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России им. Е. Н. Зиничева, кафедра физико-технических основ обеспечения пожарной безопасности; E-mail: dp-lv@yandex.ru

Юрий Петрович Заричняк — д-р физ.-мат. наук, профессор; Университет ИТМО, образовательный центр „Энергоэффективные инженерные системы“; E-mail: zarich4@gmail.com

Игорь Касьянович Мешковский — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, научно-исследовательский центр световодной фотоники; директор Центра; E-mail: igorkm@itmo.ru

Марина Александровна Симонова — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Высшая школа техносферной безопасности Инженерно-строительного института; E-mail: masima62@inbox.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023; одобрена после рецензирования 20.11.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. Meshkovskiy I.K. *Kompozitsionnyye opticheskiye materialy na osnove poristykh matrits* (Composite Optical Materials Based on Porous Matrices), St. Petersburg, 1998, 332 p. (in Russ.)
2. Ermakova L.E., Volkova A.V., Antropova T.V., Sidorova M. *Colloid Journal*, 2007, no. 5(69), pp. 603–611. (in Russ.)
3. Shakhgildyan G.Yu. *Scientific journal "GLOBUS". Technical Sciences*, 2021, no. 5(41), pp. 36–40. (in Russ.)
4. Sobina E.P. *Metrologiya poristosti i pronitsayemosti tverdykh veshchestv i materialov* (Metrology of Porosity and Permeability of Solids and Materials), Yekaterinburg, 2021, 428 p. (in Russ.)
5. Scheidegger A.E. *The Physics of Flow through Porous Media*, Univ. of Toronto press, 1957.
6. Leybenzon L.S. *Dvizheniye prirodnykh zhidkostey i gazov v poristoy srede* (Movement of Natural Liquids and Gases in Porous Media), Moscow, Leningrad, 1947, 244 p. (in Russ.)
7. Meshkovsky I.K., Belotserkovsky G.M., Plachenov T.G., Molchanova O.S. *Journal of Applied Chemistry of the USSR*, 1968, no. 7(41), pp. 1452−1457. (in Russ.)
8. Meshkovsky I.K., Belotserkovsky G.M., Plachenov T.G. *Journal of Applied Chemistry of the USSR*, 1970, no. 1(43), pp. 87–92. (in Russ.)
9. Gavronskaya Yu.Yu., Pak V.N. *Fundamental'nyye issledovaniya*, 2015, no. 2, pp. 261–266. (in Russ.)
10. Gerasimov D.S. *Osnovnyye opredeleniya i ponyatiya fil'tratsii zhidkostey i gazov. Sredy i granitsy primenyayemosti zakona Darsi* (Basic Definitions and Concepts of Liquid Filtration and Gases. Environments and Limits of Applicability of Darcy's law), Tyumen, 2013, 41 p. (in Russ.)
11. Dulnev G.N., Zarichnyak Yu.P. *Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov* (Thermal Conductivity of Mixtures and Composite Materials), Leningrad, 1974, 264 p. (in Russ.)
12. Krischer O. *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik*, Berlin u. a., Springer Verl., 1956.
13. Lykov A.V. *Yavleniya perenosa v kapillyarno-poristykh telakh* (Transport Phenomena in Capillary-Porous Bodies), Moscow, 1954, 296 p. (in Russ.)
14. Pyatkov E.S. *Mezoporistyye keramicheskiye membrany dlya fraktsionirovaniya nizkomolekulyarnykh uglevodorodov* (Mesoporous Ceramic Membranes for Fractionation Low Molecular Weight Hydrocarbons), Candidate's thesis, Moscow, 2017, 111 p. (in Russ.)
15. Timofeev D.P. *Kinetika adsorbtsii* (Adsorption Kinetics), Moscow, 1962, 252 p. (in Russ.)
16. Prasolov R.S. *Issledovaniye teploobmena pri perekhodnom vakuume* (Study of Heat Transfer in Transient Vacuum), Doctor's thesis, Leningrad, 1967, 376 p. (in Russ.)
17. Barrer R.M. *Diffusion in and through solids*, Cambridge, 1941.
18. Volkov D.P. *Journal of Engineering Physics*, 1981, no. 3(41), pp. 946–951.

Data on authors

Dmitry P. Volkov — PhD, Associate Professor; E. N. Zinichev St. Petersburg University of State Fire Service of EMERCOM of Russia, Department of Physical and Technical Fundamentals of Fire Safety; E-mail: dp-lv@yandex.ru

Yuriy P. Zarichnyak — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Educational center "Energy efficient engineering systems"; E-mail: zarich4@gmail.com

Igor K. Meshkovsky — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Research Center for Light Guide Photonics; Director, Chief Researcher; E-mail: igorkm@itmo.ru

Marina A. Simonova — PhD, Associate Professor; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Higher School of Technosphere Safety of the Institute of Civil Engineering; E-mail: masima62@inbox.ru

Received 10.11.2023; approved after reviewing 20.11.2023; accepted for publication 14.01.2024.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

BRIEF NOTES

УДК 62.50
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-294-299

ФИНИТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КВАДРОКОПТЕРОМ С ГАРАНТИЕЙ НАХОЖДЕНИЯ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА В ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ

М. Д. Кузнецов*, М. Я. Марусина

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
** kuznetcov.1997@yandex.ru*

Аннотация. Предложен новый алгоритм финитного управления беспилотным летательным аппаратом по крену и тангажу. Алгоритм управления позволяет сохранить выходной сигнал рассматриваемого объекта в заранее известных границах в течение определенного интервала времени независимо от поступающих внешних возмущений. Проведен анализ динамической системы и определена цель управления, основным требованием к которой является нахождение выходного сигнала в заданном множестве. Для проведения моделирования сформированы сигналы для внешних возмущений, затем, для подтверждения эффективности предложенного алгоритма управления, проведены эксперименты в среде MatLab с использованием различных ограничений и возмущений.

Ключевые слова: *управление, регулятор, ограничения, финитное управление, компьютерное моделирование, квадрокоптер*

Ссылка для цитирования: *Кузнецов М. Д., Марусина М. Я.* Финитное управление квадрокоптером с гарантией нахождения выходного сигнала в заданном множестве // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 294—299. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-294-299.

FINITE CONTROL OF A QUADCOPTER WITH A GUARANTEE FOR THE OUTPUT SIGNAL TO BE IN A GIVEN SET

M. D. Kuznetsov*, M. Ya. Marusina

ITMO University, St. Petersburg, Russia
** kuznetcov.1997@yandex.ru*

Abstract. A new algorithm for finite control of an unmanned aerial vehicle in roll and pitch is proposed. The control algorithm allows to save the output signal of the object under consideration within pre-known boundaries for a certain time interval regardless of incoming external perturbations. An analysis of the dynamic system is performed; the control goal is determined with the main requirement to the output signal of finding in a given set. Effectiveness of the proposed control algorithm is tested in simulations carried out in the MatLab environment using various restrictions and generated signals for external disturbances.

Keywords: control, regulator, constraints, finite control, computer simulation, quadcopter

For citation: Kuznetsov M. D., Marusina M. Ya. Finite control of a quadcopter with a guarantee for the output signal to be in a given set. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 3. P. 294—299 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-294-299.

Введение. Анализ способности управлять объектом, находясь при этом на значительном удалении от него, является актуальным подходом к задачам управления. Однако при ре-

© *Кузнецов М. Д., Марусина М. Я., 2024*

шении таких задач необходимо обеспечить повышение качества управления, так как именно это определяет надежность работы всей системы. Сохранение работоспособности объекта в определенном известном диапазоне — это лишь один из многих существующих вариантов управления. Для управления в условиях определенности параметров модели существуют классические методы, такие как управление по заданным координатам замкнутой системы, управление с обеспечением заданных частотных характеристик замкнутой системы, оптимальное управление и др. [1, 2]. Классический метод управления, альтернативный финитному управлению и называемый „управление по заданному времени“, был рассмотрен в работе [3]. Одним из факторов оценки устойчивости системы является время переходного процесса. Также существует понятие сверхфинитного управления, которое позволяет достичь требуемого конечного положения объекта за выбранный промежуток времени, не привязываясь при этом к начальным условиям [4]. Конечно, самым простым способом ускорения переходного процесса является увеличение коэффициента усиления линейной системы, но это приведет, как и при сверхфинитном управлении, к увеличению затрат [4, 5].

В настоящей статье рассмотрен способ замены координат, описанный в работе [6], применительно к классу объектов „квадрокоптеры“. На основе этого способа разработан алгоритм управления беспилотным летательным аппаратом (БПЛА) по крену и тангажу, позволяющий сохранить выходной сигнал рассматриваемого объекта, независимо от поступающих внешних возмущений, в заранее известных жестких границах в течение определенного промежутка времени.

Синтез регулятора с ограничениями на значения выходной переменной. Рассмотрим динамическую систему:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df; \\ y &= Cx, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — входной и выходной сигналы, $u(t)$ — управление, A, B, C — матрицы управления квадрокоптером, D — известная матрица, $f(t)$ — неизвестная ограниченная функция возмущения, зависящая от возможных параметрических неопределенности и отклонения, внешнего нежелательного влияния, такого как турбулентность, неучтенная нелинейная динамика, перекрестные связи и т. д.

Динамическая модель двигателя имеет следующий вид:

$$\dot{F}_i = -\omega_i F_i + k_i \omega_i u_i, i = \overline{1, 4}, \tag{2}$$

где ω_i — полоса пропускания исполнительного механизма, k_i — положительный коэффициент усиления, u_i — входное напряжение.

Необходимо разработать способ управления, который гарантирует, что выходные сигналы объекта $y(t)$ присутствуют в заданном множестве:

$$y = \left\{ y \in R^v : \underline{g}_i(t) < y_i(t) < \overline{g}_i(t), i = 1, \ldots, v \right\} \text{ для } t \geq 0, \tag{3}$$

где функции $\underline{g}_i(t)$ и $\overline{g}_i(t)$ ограничены совместно со своими первыми производными по времени, y — выходной сигнал квадрокоптера, v — количество рассматриваемых степеней свободы.

Данные функции выбираются разработчиком исходя из требований к работе системы [7, 8]. Например, для стабилизации БПЛА требуется обеспечить угловое положение объекта $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ в заданных пределах [9]:

$$\underline{\alpha} < \alpha(t) < \overline{\alpha}, \ \underline{\beta} < \beta(t) < \overline{\beta}, \ \underline{\gamma} < \gamma(t) < \overline{\gamma}.$$

Рассмотрим выходной сигнал, который соответствует функции

$$y = \Phi(\varepsilon, t) = g(t) S(\varepsilon), \tag{4}$$

где функция $S(\varepsilon) \in R$ определяет замену координат для перехода от задач с ограничениями к задачам без ограничений, а функция $g(t) \in R$ определяет ограничения для выходного диапазона; следует учесть, что функции $g(t) \neq 0$ и $\dot{g}(t)$ ограничены.

Определим функцию $S(\varepsilon) = \dfrac{\overline{r} e^{\varepsilon} + \underline{r}}{e^{\varepsilon} + 1}$, тогда из (4) следует, что обратное преобразование имеет вид $\varepsilon = \dfrac{\underline{r} g - y}{y - \overline{r} g}$. Таким образом, предложенная функция $S(\varepsilon)$, наряду с целью (4), обеспечивает соответствие выходного сигнала y следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} \underline{r} g < y(t) < \overline{r} g(t),\ g(t) > 0; \\ \overline{r} g < y(t) < \underline{r} g(t),\ g(t) < 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Рассмотрим закон управления

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \varepsilon, \tag{6}$$

где $\hat{x}$ — оценка x; первое слагаемое $K_1 \hat{x}$ обеспечивает устойчивость замкнутой системы, а второе слагаемое $K_2 \varepsilon$ обеспечивает наличие выходного сигнала точно в заданных границах (4), (5); матрицы K_1 и K_2 выбираются так, чтобы матрицы $A + BK_1C$ и CBK_2 были гурвицевы.

Предложенный алгоритм финитного управления беспилотным летательным аппаратом по крену и тангажу был реализован на примере квадрокоптера QBall 2, полная линейная динамическая модель и значения параметров которого соответствуют документации [10].

Для проведения экспериментов была использована модель квадрокоптера в векторно-матричной форме:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L/J & -L/J & L/J & -L/J \\ 0 & 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3\omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4\omega_4 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

где L=0,2 м — расстояние между винтом и центром тяжести, J=0,03 кг·м^2 — момент инерции.

Результаты моделирования. За основу при моделировании в среде MatLab была принята векторно-матричная форма выходного сигнала (7). Были выбраны несколько типов возмущений и форм ограничений. Матрица возмущений выбрана в виде $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Требованием по времени является установка выходного сигнала в положение „0“ за время, не превышающее 10 с. Сигнал возмущения определен как высокочастотные мультигармонические функции:

$$f(t) = 1,7 \sin 20t + 2,4 \sin 101t + 0,1. \tag{8}$$

Виды ограничений описываются следующими функциями:

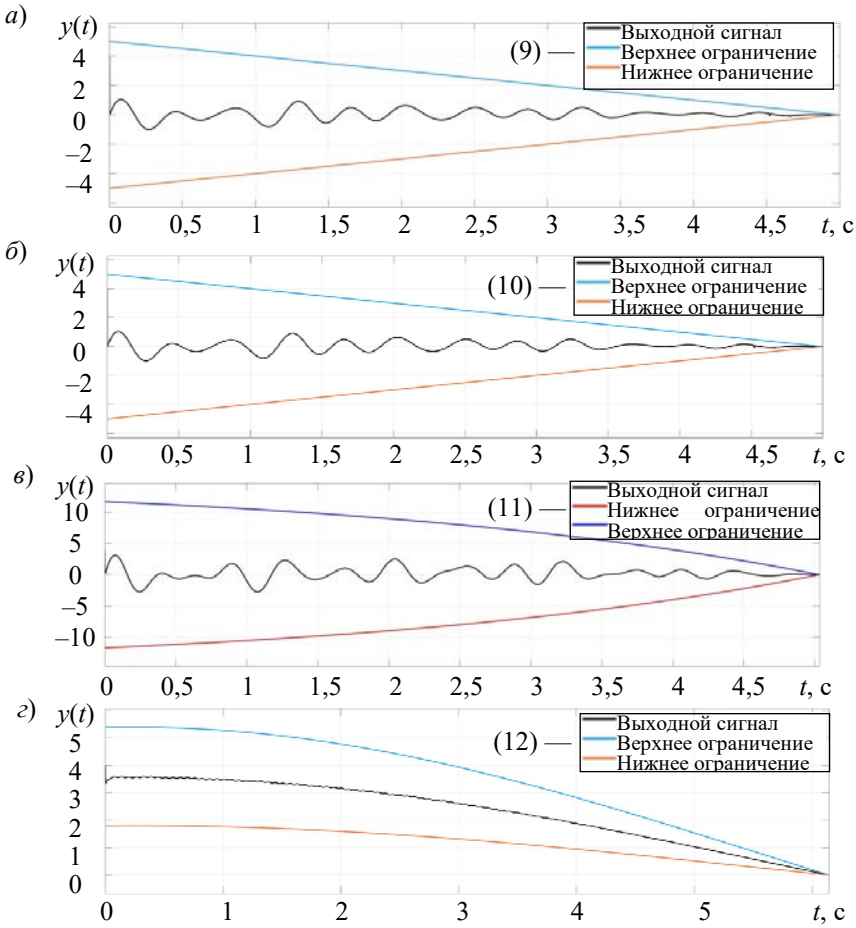
$$\left.\begin{aligned}\overline{g}(t) &= -10\ln(0{,}1t+0{,}001);\\ \underline{g}(t) &= 10\ln(0{,}1t+0{,}001);\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{g}(t) &= -5+t;\\ \underline{g}(t) &= 5-t;\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{g}(t) &= 3\left(e^{0,3t+0,1}-5\right);\\ \underline{g}(t) &= -3\left(e^{0,3t+0,1}-5\right);\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{g}(t) &= 4{,}5\left(\sin(0{,}3t+1{,}5)+0{,}2\right),\\ \underline{g}(t) &= -4{,}5\left(\sin(0{,}3t+1{,}5)+0{,}2\right).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

На рисунке, *а*—*г* в виде зависимости $y(t)$ показана эффективность предложенного алгоритма управления при ограничениях (9)—(12).



Результаты моделирования подтверждают, что во всем диапазоне моделирования выходной сигнал остается в заданных пределах независимо от характера внешних возмущений. Анализ графиков показывает, что выходной сигнал достигает требуемого значения, соответствующего нужному положению объекта, за отведенный промежуток времени, что наглядно отражает эффективность предложенного алгоритма управления.

Заключение. Разработанный новый алгоритм финитного управления БПЛА по крену и тангажу позволяет гарантировать нахождение выходного сигнала объекта в определенном ограниченном множестве, а также нахождение его в конечной точке в течение заданного

промежутка времени. Границы могут быть заданы любыми непрерывно дифференцируемыми функциями.

Рассмотрена линеаризованная модель квадрокоптера QBall 2 в условиях различных подаваемых возмущений и внешних ограничений. Эффективность предложенного алгоритма управления продемонстрирована моделированием в среде MatLab.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б.* Математическая теория автоматического управления: Учеб. пособие. М.: Ленанд, 2019.
2. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. школа, 2003.
3. *Youngduan Song, Yujuan Wang, Kristic M.* Time-varying feedback for stabilization in prescribed finite time, Utkin 80 // Sliding Mode Control and Observation. 2018. Vol. 29. P. 618—633.
4. *Зименко К. А.* Методы финитного управления на основе теории однородных систем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб, 2018.
5. *Пасергов С. Э.* Алгоритмы управления формацией в задаче равномерного расположения агентов: Автореф. дис. … канд. техн. наук. М., 2013.
6. *Furtat I., Furtat P., Gushchin P.* Control of Dynamical Plants with a Guarantee for the Controlled Signal to Stay in a Given Set // Autom. Remote Control. 2021. N 82. P. 654—669.
7. *Furtat I. B., Putov V. V.* Suboptimal control of aircraft lateral motion // IFAC Proc. Volumes (IFAC-PapersOnline). 2013. Vol. 2. P. 276—282.
8. *Kuznetsov M., Vrazhevsky S., Kopysova E.* Quadrotor Control under Prespecified State-Space Bounds // 6th Scienific School on Dynamic Complex Networks and their Applications, DCNA, 2022. P. 172—175.
9. *Furtat I., Furtat E., Tupichin E.* Modified Backstepping Algorithm with Disturbances Compensation // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. P. 1056—1061.
10. https://www.manualslib.com/manual/1545252/Quanser-Qball-2.html.

Сведения об авторах

Михаил Дмитриевич Кузнецов — аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: kuznetcov.1997@yandex.ru

Мария Яковлевна Марусина — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: myamarusina@itmo.ru

Поступила в редакцию 14.11.23; одобрена после рецензирования 29.11.23; принята к публикации 14.01.24.

REFERENCES

1. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Rapoport L.B. *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* (Mathematical Theory of Automatic Control), Moscow, 2019. (in Russ.)
2. Afanasyev V.N., Kolmanovsky V.B., Nosov V.R. *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya* (Mathematical Theory of Design of Control Systems), Moscow, 2003. (in Russ.)
3. Song Y., Wang Y., Kristic M. *Sliding Mode Control and Observation*, 2018, vol. 29, pp. 618–633.
4. Zimenko K. A. *Metody finitnogo upravleniya na osnove teorii odnorodnykh sistem* (Methods of Finite Control Based on the Theory of Homogeneous Systems), Candidate's thesis, St. Petersburg, 2018, 120 p. (in Russ.)
5. Pasergov S.E. *Algoritmy upravleniya formatsiyey v zadache ravnomernogo raspolozheniya agentov* (Formation Control Algorithms in the Problem of Uniform Distribution of Agents), Candidate's thesis, Moscow, 2013, 120 p. (in Russ.)
6. Furtat I., Furtat P., Gushchin P. *Autom. Remote Control*, 2021, no. 82, pp. 654–669.
7. Furtat I.B., Putov V.V. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 2013, vol. 2, pp. 276–282.
8. Kuznetsov M., Vrazhevsky S., Kopysova E. *6th Scienific School on Dynamic Complex Networks and their Applications*, DCNA, 2022, pp. 172–175.
9. Furtat I., Furtat E., Tupichin E. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, pp. 1056–1061.
10. https://www.manualslib.com/manual/1545252/Quanser-Qball-2.html.

Data on authors

Mikhail D. Kuznetsov — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: kuznetcov.1997@yandex.ru

Maria Ya. Marusina — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: myamarusina@itmo.ru

Received 14.11.23; approved after reviewing 29.11.23; accepted for publication 14.01.24.